(7 pages)

NOVEMBER 2019 **72084/TAM5B**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Prove that $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ என நிறுவுக.

2. Prove that the set $I = \{1, 2, 3 \cdots\}$ is countable.

   கணம் $I = \{1, 2, 3 \cdots\}$ என்பது எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

3. If A and B are equivalent and B and C are equivalent then prove that A and C are equivalent.

   கணங்கள் A மற்றும் B சமான கணங்கள், B மற்றும் C சமான கணங்கள் எனில் A மற்றும் C சமான கணங்கள் என நிரூபி.

4. If $x \geq 1$ then prove that $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverges.

   $x \geq 1$ எனில் $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ விரியும் என நிறுவுக.

5. Define a conditionally convergent series and give an example.

   நிபந்தனையுடன் ஒருங்கும் தொடரை வரையறுத்து எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

6. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent series. Prove that $\underset{n\to\infty}{Lt}\ a_n = 0$.

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ஒருங்கும் தொடர் எனில் $\underset{n\to\infty}{Lt}\ a_n = 0$ என நிறுவுக.

7. If $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ and $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$, then prove that $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = L + M$.

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{x\to\infty} g(x) = M$, எனில் $\lim_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = L + M$ என நிறுவுக.

8. If G_1 and G_2 are open subsets of the metric space M, then prove that $G_1 \cap G_2$ is open.

   யாப்பு வெளி M ல் G_1 மற்றும் G_2 திறந்த கணங்கள் எனில் $G_1 \cap G_2$ –உம் ஒரு திறந்த கணமாகும் என நிறுவுக.

III B.Sc (Maths) - Real Analysis I

9. If A_1 and A_2 are connected subsets of a metric space M and $A_1 \cap A_2 \neq \phi$, then prove that $A_1 \cup A_2$ is connected.

   யாப்பு வெளி M–ன் இணைத்த உபகணங்கள் A_1, A_2 மற்றும் $A_1 \cap A_2 \neq \phi$, எனில் $A_1 \cup A_2$ இணைந்த கணம் என நிறுவுக.

10. Prove that $\overline{\overline{A}} = A$.

    $\overline{\overline{A}} = A$ என நிறுவுக.

11. Let $f : [2, 4] \to [2, 4]$ be defined as $f(x) = x \ \forall\ x \in [2, 4]$. Let $\sigma = \{2, 3, 4\}$ be a subdivision of $[2, 4]$. Find $\cup [f; \sigma]$.

    $f : [2, 4] \to [2, 4]$ என்ற சார்பு $f(x) = x \ \forall\ x \in [2, 4]$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $\sigma = \{2, 3, 4\}$ என்பது $[2, 4]$ன் ஒரு உபபிரிப்பு எனில் $\cup [f; \sigma]$–கணக்கிடுக.

12. Define pointwise convergence of sequence of functions.

    சார்புக்களின் தொடர் வரிசைக்கு புள்ளி வழி ஒருங்கால் வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. If $f : A \to B$, $x, y \subset A$ prove that $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

    $f : A \to B$, $x, y \subset A$ எனில் $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$ என நிறுவுக.

14. Prove that the sequence $\left\{\log\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverges to minus infinity.

    தொடர் வரிசை $\left\{\log\left(\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது $-\infty$ க்கு விரியும் என நிறுவுக்.

15. If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of non-negative numbers and if $\lim_{n\to\infty} \{S_n\} = L$. Prove that $L \geq 0$.

    $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒரு மிகை எண் தொடர், மேலும் $\lim_{n\to\infty} \{S_n\} = L$ எனில் $L \geq 0$ என நிறுவுக.

16. Let l^{∞} be the set of all bounded sequence of real numbers. If $x = \{x_n\}_1^{\infty}$ and $y = \{y_n\}_1^{\infty}$ are points in l^{∞}, define $\rho(x, y) = \underset{1 \leq n < \infty}{l.u.b.} |x_n - y_n|$. Prove that ρ is a metric on l^{∞}.

    l^{∞} என்பது மெய்யெண்களாலான, வரம்புடைய தொடர்வரிசைகளின் கணம் என்க. $x = \{x_n\}_1^{\infty}$, $y = \{y_n\}_1^{\infty}$ என்பன l^{∞}–ல் உறுப்புகள் எனில் $\rho(x, y) = \underset{1 \leq n < \infty}{l.u.b.} |x_n - y_n|$. ρ என்பது l^{∞}–ல் ஒரு யாப்பு என நிறுவுக.

17. Let f be a continuous function from a metric space M_1 into a metric space M_2. If M_1 is connected then prove that $f(M_1)$ is connected.

மெட்ரிக் வெளி M_1 லிருந்து M_2 க்கு வரையறை செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு f என்க M_1 ஆனது இணைத்த கணம் எனில் $f(M_1)$ என்றும் இணைத்த கணமாகும் என நிறுவுக.

18. If $f \in R[a, b]$ and $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \le x \le b$ and if f is continuous at $x_0 \in [a, b]$. Prove that $F'(x_0) = f(x_0)$.

$f \in R[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \le x \le b$ மேலும் $x_0 \in [a, b]$ல் f ஆனது தொடர்ச்சியுள்ளது எனில் $F'(x_0) = f(x_0)$ என நிறுவுக.

19. If f and g both have derivative at $C \in R'$, then prove that fg has derivative at C and

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

f மற்றும் g என்பன $C \in R'$ல் வகைகெழுவினைப் பெற்றிருப்பின் fg ஆனதும் C –ல் வகைகெழுவைப் பெற்றிருக்கும் எனவும் $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$ எனவும் நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the set $[0, 1] = \{0 \le x \le 1 : x \in R\}$ is uncountable.

$[0, 1] = \{0 \le x \le 1 : x \in R\}$ என்ற கணம் எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.

21. Prove that the sequence $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

தொடர் வரிசை $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது ஒருங்கும் என நிறுவுக.

22. Prove that any bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence.

மெய்யெண்களாலான ஒவ்வொரு வரம்புடைய தொடர் வரிசையும் ஒருங்கும் உப தொடர் வரிசையைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

23. Prove that l^2 is complete metric space.

l^2 என்பது முழுமையான யாப்பு வெளி என நிறுவுக.

24. Let $\langle M, \rho \rangle$ be a complete metric space. If T is a contraction on M, then prove that there is only one point x in M such that $Tx = x$.

$\langle M, \rho \rangle$ என்பது முழுமையான யாப்புவெளி என்க T என்பது M –ன் மேல் வரையறை செய்யப்பட்ட சுருங்கச் சார்பு எனில் M–ல் x என்ற ஒரேயொரு உறுப்பினை $Tx = x$ என்றாவாறு காணலாம் என நிறுவுக.