

- Time : Three hours Maximum : 75 marks
- PART A — (10 × 2 = 20 marks)
- Answer any TEN questions.
- Define subgroup with example.  
உட்குலம் வரையறைத்து உதாரணம் தருக.
  - If  $G$  is a finite group and  $a \in G$ , prove that  
 $a^{O(G)} = e$ .  
 $G$  என்பது ஒரு முடிவறை குலம் மற்றும்  $a \in G$  எனில்  
 $a^{O(G)} = e$  என நிறுவுக.
  - State Lagrange's theorem.  
லெக்ஸாஸியின் தேற்றத்தை எழுதுக.
  - Show that intersection of two normal subgroups of  $G$  is a normal subgroup of  $G$ .  
 $G$  யினுடைய இரண்டு நேர்மை உட்குலங்களின் வெட்டும் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என நிறுவுக.
  - State Cauchy's theorem for abelian groups.  
பரிமாற்றுக் குலத்திற்கான காசூஷியின் தேற்றத்தை எழுதுக.
- II B.Sc (Maths) - Algebraic Structures.
- PART B — (5 × 5 = 25 marks)
- Answer any FIVE questions.
- State Fermat's theorem.  
பெர்மாட்டில் தேற்றத்தை எழுதுக.
  - Write any two maximal ideal of  $\mathbb{Z}$ .  
 $\mathbb{Z}$ -ன் ஏதேனும் இரு மீப்பெரு சீர்வல்லையம் எழுதுக.
  - Prove that for all  $a \in G$ ,  
 $Ha = \{x \in G / a \equiv x \pmod H\}$  என நிறுவுக.
  - If  $H$  and  $K$  are subgroups of  $G$  and  $O(H) > \sqrt{O(G)}$ ,  $O(K) > \sqrt{O(G)}$ , prove that  $H \cap K \neq (e)$ .
  - $H$  மற்றும்  $K$  என்பன  $G$  யின் உட்குலங்கள் மற்றும்  $O(H) > \sqrt{O(G)}$ ,  $O(K) > \sqrt{O(G)}$ , எனில்  $H \cap K \neq (e)$  என நிறுவுக.
6. Compute  $a^{-1}ba$  where  $a = (5, 7, 9)$   $b = (1, 2, 3)$ .  
 $a = (5, 7, 9)$   $b = (1, 2, 3)$  எனில்  $a^{-1}ba$  கணக்கி டுக.
7. Define homomorphism of a group.  
குலத்தின் செயல்மாறாக கோட்டுல் வரையறு.
- Find the orbit and cycles of the permutation  

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1	2	3	4	5	6
(6, 5, 4, 3, 1, 2)					

 என்ற வரிசைமாற்றத்தின் சுற்றுப்பாலைத் திரும்பும் சுழற்சி காணக்.
  - State Pigeonhole principle.  
இஜியான்லோல் கோட்பாட்டை எழுது.
  - If  $U$  is an ideal of  $R$  and  $1 \in U$ , prove that  $U = R$ .  
 $U$  என்பது  $R$ -இடையை ஒரு சீரிய களும் மற்றும்  $1 \in U$  எனில்  $U = R$  என நிறுவுக.

18. If  $F$  is a field prove that its only ideals are  $(O)$  and  $F$  itself.

$F$  ஒரு கனம் எனில்,  $(O)$  மற்றும்  $F$  மட்டுமே அதன் ஓரே கிரியகளாக என நிறுவக.

19. Let  $R$  be a Euclidean ring and  $a, b \in R$ . Prove that if  $b \neq 0$  is not a unit in  $R$ , then  $d(a) < d(ab)$ .

$R$  என்பது ஒரு யூக்ளிடியன் வளையம் மற்றும்  $a, b \in R$ ,  $b \neq 0$  என்பது  $R$ -ன் அலகு உறுப்பு இல்லை எனில்  $d(a) < d(ab)$  என நிறுவக.

PART C —  $(3 \times 10 = 30$  marks)

Answer any THREE questions.

20. Let  $\varphi$  be a homomorphism of  $G$  into  $\tilde{G}$  with kernel  $K$ . Prove that  $G/K \approx \tilde{G}$ .

$\varphi$  என்பது  $G$  யிலிருந்து  $\tilde{G}$  க்கான செயல்மாறாக கோங்ததல் மற்றும் கொள்ளல்  $K$  எனில்  $G/K \approx \tilde{G}$  என நிறுவக.

21. State and prove Sylow's theorem for Abelian groups.

பரிமாற்றுக் குலத்திற்கான கைவேலாவின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவக.

5                    72083/TAM5A

22. Prove that if  $U$  is an ideal of the ring  $R$ , then  $R/U$  is a ring and is a homomorphic image of  $R$ .

$U$  என்பது  $R$ -ன் கிரியகளாக எனில்  $R/U$  என்பது வளையம் மற்றும் அது  $R$ -னுடைய செயல்மாறாக கோங்ததலின் பிழப்பும் என நிறுவக.

23. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

இப்பிவாரு என் அரங்கத்தையும் களத்தினுள் திணிக்க முடியும் என நிறுவக.

24. Prove that  $J[i]$  is an Euclidean ring.

$J[i]$  ஒரு யூக்ளிடியன் வளையம் என நிறுவக.

6                    72083/TAM5A