

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

- Prove that the Kernel of a vector space homomorphism is a subspace.
திசையன் வெளிக்கான செயல்மாறாகக் கோந்தவின் உட்கரு, ஒரு உள்வெளி என நிறுவுக.
- Define internal direct sum.
உள் நோன் கூடுதலை வரையறு.
- What is meant by basis of a vector space?
ஒரு திசையன் வெளியின் அடிக்கணம் என்றால் என்ன?
- If $\dim_f V = 10$, find $\dim_f \text{Hom}(V, F)$.
 $\dim_f V = 10$ எனில், $\dim_f \text{Hom}(V, F)$ -ஐக் காணக.
- Define \hat{V} .
 \hat{V} -ஐ வரையப்படு.
- Given an example of an inner product space.
உட்பெருக்கம் வெளிக்கான உதாரணம் தருக.

III B.Sc(Maths) - Linear Algebra

72087/TAM6A

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.
கோலியின் ஒருபாடு உருமாற்றத்திற்கான தேற்றுத்தை கூறி நிறுவுக.

- If $F^{(3)}$, prove that the vector $(1,1,0), (3,1,3), (5,3,3)$ are linearly independent.
 $F^{(3)} - \text{ல்}$ உள்ள $(1,1,0), (3,1,3), (5,3,3)$ ஆகிய திசையன்கள் நேரியல் சர்ப்புள்ளதாக இருக்கும் என நிரூபி.
- If $\psi: V \rightarrow V'$ is an onto homomorphism with Kernel W , then prove that $\frac{V}{W} \cong V'$.
 $\psi: V \rightarrow V'$ என்பது W என்ற உட்கரு உடைய செயல்மாறா மேல் கோந்துள் எனில், $\frac{V}{W} \cong V'$ என நிறுவுக.
- Prove that $A(A(W)) = W$.
 $A(A(W)) = W$ என நிறுவுக.
- If W is a subspace of a finite dimensional inner product space V over \mathbb{F} then prove that $V = W \oplus W^\perp$.
 W என்பது V என்ற முடிவறு பரிமாணம் கொண்ட உட்பெருக்கல் வெளியின் உள்வெளியாக இருப்பின் $V = W \oplus W^\perp$ என நிறுவுக.

7. If W is a subspace of V , prove that W^\perp is also a subspace of V .

W என்பது V -ன் உள்வெளி எனில் W^\perp - ம், V -ன் உள்வெளி என நிறுவுக.

8. Give an example of an algebra over \mathbb{F} .
 \mathbb{F} -ன் மீதான இயற்கணிதத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுத்தருக.

9. If $T \in A(V)$. Define the range of T .
 $T \in A(V)$ எனில், T -ன் வீச்சை வரையறு.

10. If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(v)$ then prove that $vT = \lambda v$ for some $v \neq 0$ in V .

$\lambda \in F$ என்ற உறுப்பு $T \in A(v)$ - ன் சிறப்பு மூலமாக இருக்குமானால், $vT = \lambda v$, $v \neq 0 \in V$ என்று நிறுவுக.

11. Define matrix of a linear transformation.
ஒருபாடு உருமாற்றத்தின் அணியை வரையறு.

12. Let W be a subspace of V . When do you say that W is invariant under $T \in A(V)$?
 W -என்பது V -ன் ஒரு உள்வெளி எனக். $T \in A(V)$ என்பது T என்பது கீழ் W என்பது ஒரு மாற்றமில்லா உள்வெளியாக இருக்கும் என்று எப்போது கூற முடியும்?

PART C – (3 x 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

ANSWERING THE CHALLENGE

20. If A and B are the two subspaces of a finite dimensional vector space V over F, then prove that

$$(a) \frac{A+B}{B} \cong \frac{A}{A \cap B},$$

$$(b) \quad \dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

- $$(2b) \quad \dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

21. If V and W are of dimensions ' m ' and ' n ' respectively over F , then prove that $\text{Hom}(V,W)$ is

$$(\mathfrak{A}) \quad \frac{A+B}{B} \equiv \frac{A}{A \cap B}$$

$$(29) \quad \dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

ଶ୍ରୀମଦ୍ଭଗବତ

21. If V and W are of dimensions m and n respectively over \mathbb{F} , then prove that $\text{Hom}(V, W)$ is of dimension ' mn ' over \mathbb{F} .

F-ன் மீதான V மற்றும்

பரிமாணம் 'mn' என நிறுவக.

முறையே 'm' மற்றும் 'n' , எனில் $\text{Hom}(V,W)$ -னா பரிமாணம் ' $m \times n$ ' என நிறுவக.

24. If $T \in A(v)$ has all its characteristic roots in \bar{F} T-பின் சிறும் பல்லுறுப்பானின் மாறிலி உறுப்பு பூச்சியமற்றதாகும் என் நிறைவுக.

matrix of T is triangular.

$T \in A(v)$ -யின் சிறப்பீயல்பு மூலங்கள் அனைத்தும் T -ல் இருக்குமானால், V -ன் ஆடிக் கணத்தில் T -ன் அணி முக்கோண வடிவிலிருக்கும் என நிரூபிதி.

100

6 72087/TAM6A