(6 pages)

NOVEMBER 2018 **72084/TAM5B**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. For any sets A, B and C, prove that $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

   A, B மற்றும் C என்ற ஏதாவது கணங்களுக்கு $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என நிறுவுக.

2. Prove that the set of all real number is uncountable.

   மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது அல்ல என நிரூபி.

3. Define convergent and divergent sequence.

   ஒடுங்கும் மற்றும் விரியும் தொடர் முறை – வரையறு.

4. Find the limit of $\{n^{-n-1}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

   $\{n^{-n-1}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ -ன் சார்பு எல்லை காண்க.

5. For any $a, b, \in R$ show that $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

   $a, b, \in R$ எனில் $||a|-|b|| \leq |a-b|$ என நிறுவுக.

6. Prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n}{5n^2+4} = \frac{3}{5}$.

   $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n}{5n^2+4} = \frac{3}{5}$ என நிறுவுக.

7. Define Cauchy sequence.

   காஷே தொடர்முறை வரையறு.

8. If $a_1 + a_2 + ...$ converges to s, prove that $a_2 + a_3 + ...$ converges to $s - a_1$.

   $a_1 + a_2 + ...$ என்பது s -ல் ஒடுங்கும் எனில்

   $a_2 + a_3 + ...$ என்பது $s - a_1$ -ல் ஒடுங்கும் என நிரூபி.

9. State the comparison test for absolute convergence.

   தனி ஒடுங்கலின் ஒப்பீட்டுச் சோதனையை கூறு.

10. Prove that if the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converges for $x = x_0$ then it converges absolutely for all x such that $|x| < x_0$.

    $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ என்ற அடுக்குத் தொடர், $x = x_0$ -ல் ஒடுங்கும் எனில் $|x| < x_0$ என்ற எல்லா x -க்கு அந்தத்தொடர் தனி ஒடுங்கல் அடையும் என நிறுவுக.

in Maths → Real Analysis - I

11. If $\lim_{x\to a} f(x) = L$ and $C \in R$, prove that $\lim_{x\to a} C f(x) = CL$.

    $\lim_{x\to a} f(x) = L$ மற்றும் $C \in R$ எனில் $\lim_{x\to a} C f(x) = CL$ என நிறுவுக.

12. Define metric space.

    மெட்ரிக் வெளி - வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that if $f : A \to B$ and $X \subset A, Y \subset A$ then $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

    $f : A \to B$ மற்றும் $X \subset A, Y \subset A$ எனில் $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ என நிறுவுக.

14. If A is any nonempty subset of R that is bounded above, prove that A has a least upper bound in R.

    A எனும் R -னுடைய ஏதாவது ஒரு உட்கணம் மேல் வரம்புடையது எனில் R னுடைய மீச்சிறு மேல் வரம்பை A -பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

15. Prove that if $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ and $\lim_{n\to\infty} s_n = M$ then $L = M$.

    $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ மற்றும் $\lim_{n\to\infty} s_n = M$ எனில் $L = M$ என நிறுவுக.

16. If $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are sequences of real numbers, if $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ and $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ where $M \neq 0$, prove that $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_n}{t_n}\right) = \frac{L}{M}$.

    $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆகியன மெய்யெண்களின் தொடர்முறை மற்றும் $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ மற்றும் $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ $M \neq 0$ எனில் $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_n}{t_n}\right) = \frac{L}{M}$.

17. Prove that any bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence.

    மெய்யெண்கள் வரம்பறுக்குட்பட்ட ஒரு தொடர்முறை ஒடுங்கும் துணைத் தொடர் முறையைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

18. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

    $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்ற தொடர் விரியும் என நிறுவுக.

[P.T.O.]

19. If 'f' and 'g' are real-valued functions, if f is continuous at 'a' and g is continuous at $f(a)$, prove that $g \circ f$ is continuous at a.

f மற்றும் g என்ற மெய் சார்புகளில், f என்பது 'a'-ல் தொடர்ச்சியாகவும், g என்பது $f(a)$-ல் தொடர்ச்சியாகவும் இருந்தால் $g \circ f$-ம் a-யில் தொடர்ச்சியாக இருக்கும் என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the countable union of countable sets is countable.

எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் சேர்ப்பும் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

21. Show that the sequence $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n-1}^{\infty}$ is convergent.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n-1}^{\infty}$ என்ற தொடர்முறை ஒடுங்கமையும் என காட்டுக.

22. Prove that convergent sequence of a real numbers is a cauchy sequence.

ஒடுங்கமைவுடைய மெய்யெண்களின் தொடர்முறை ஒரு காஷே தொடர் முறை என நிறுவுக.

23. Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ஒடுங்கமைவுடையது என நிறுவுக.

24. Prove that the real valued function f is continuous at $a \in R'$ if and only if $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ implies $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

f என்ற மெய்சார்பு $a \in R'$-ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கத் தேவையான மற்றும் அவசியமான கட்டுப்பாடு, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ என்றால் $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ என நிறுவுக.