(6 pages)

**APRIL 2021** **72087/TAM6A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer any TEN questions.

1. Define linear combination.

   நேரியல் சேர்வு வரையறு.

2. If $V$ is a vector space over $F$, prove that $0V = 0,\ v \in V$.

   $V$ என்பது $F$ ன் மீதான திசையன்வெளி எனில் $0V = 0,\ v \in V$ என நிறுவுக.

3. Define basis of a vector space.

   ஒரு திசையன் வெளியின் அடிகளம் வரையறு.

4. Define homomorphism of a vector space.

   திசையன் வெளியின் செயலொப்புமை வரையறு.

5. Define internal direct sum.

   உள் நேர்கூட்டல் வரையறு.

6. Define annihilator.

   நீக்கி வரையறு.

7. If $W$ is a subspace of $V$, write down $W^{\perp}$.

$W$ என்பது $V$ யின் உள்வெளி எனில் $W^{\perp}$ எழுதுக.

8. Find the length of $< w_1, w_1 >$ where $w_1 = (3, 2, 1)$.

$w_1 = (3, 2, 1)$ என்றிருந்தால் $< w_1, w_1 >$-ன் நீளம் காண்க.

9. Define algebra.

இயற்கணிதம் வரையறு.

10. Define regular linear transformation.

ஒழுங்குறு நேரியல் உருமாற்றம் வரையறு.

11. When do you say that the subspace $W$ of $V$ is invariant under $T \in A(V)$?

$T \in A(V)$ யின் கீழ் $V$ யின் உள்வெளி $W$ எப்பொழுது மாறாததாக இருக்கும்

12. Define characteristic root of $T \in A(V)$.

$T \in A(V)$ யின் சிறப்பியல் மூலத்தை வரையறு.

PART B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that the intersection of two subspaces of a vector space $V$ is a subspace of $V$.

திசையன் வெளி $V$ -யின் இரு உள்வெளிகளின் வெட்டு $V$ யின் உள்வெளி என நிறுவுக.

14. Prove that $v_1, v_2, ..., v_n$ are in $v$, then either they are linearly independent or some $v_k$ is a linear combination of the proceeding ones $v_1, v_2, ... v_{k-1}$.

$v_1, v_2, ..., v_n$ என்பன $v$ யில் இருந்தால் அவைகள் நேரியல் சார்பற்றதாகவோ அல்லது சில $v_k$ ஆனது முந்தையனவற்றின் நேரியல் சேர்வாகவோ இருக்கும் என நிறுவுக.

15. Prove that the vectors (1, 2, 1), (2, 1, 0) and (1, –1, 2) are linearly independent.

(1, 2, 1), (2, 1, 0) மற்றும் (1, –1, 2) ஆகியன் நேரியல் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

16. Prove that any two basis of a finite dimensional vector space $V$ have the same number of elements.

முடிவுறு பரிமாணமுள்ள திசையன் வெளி $V$ -ல உள்ள எந்த இருதளங்களிலும் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் என நிறுவுக.

17. Prove that $W^{\perp}$ is a subspace of $V$.

$W^{\perp}$ என்பது $V$ யின் உள்வெளி என நிறுவுக.

18. Prove that $F^{(n)}$ is isomorphic $F^{(m)}$ if and only if $n = m$.

$F^{(m)}$ என்பது $F^{(n)}$ -ற்கு இயல் ஒப்புமை பெற்றிருக்க தேவையான மற்றும் அவசியமான கட்டுப்பாடு $n = m$ என நிறுவுக.

19. Prove that if $V$ is finite dimensional over $F$ and if $T \in A(V)$ is singular, then there exists an $S \neq 0$ in $A(V)$ such that $ST = TS = 0$.

$F$ ன் மீது $V$ ஒரு முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது மற்றும் $T \in A(V)$ ஒருமைத்தன்மையுடையது எனில் $A(V)$ -யில் $S \neq 0$ க்கு $ST = TS = 0$ என நிறுவுக.

PART C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

20. If $T$ is a homomorphism of $U$ onto $V$ with Kernel $W$, prove that $V$ is isomorphic to $U/W$. Conversely if $U$ is a vector space and $W$ is a subspace of $U$, then prove that there is a homomorphism of $U$ onto $U/W$.

உட்கரு $W$ வுடன் $U$ வின் மேல் சார்பு $V$ க்கு $T$ ஒரு செயல் ஒப்புமை எனில் $V$ யானது $U/W$ க்கு இயல் ஒப்புமை உடையது என நிறுவுக. மறுதலையான $U$ என்பது திசையன் வெளி மற்றும் $W$ என்பது $U$ வின் உள்வெளி எனில் U க்கும், அதன் மேல்சார்பு $U/W$. க்கும் செயல் ஒப்புமை இருக்கும் என நிறுவுக.

21. If $A$ and $B$ are finite dimensional subspace of a vector space $V$, prove that $(A+B)$ is finite dimensional and $\dim(A+B)=\dim(A)+\dim B-\dim(A\cap B)$.

$A$ மற்றும் $B$ என்பன $V$-யின் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உள்வெளிகள் எனில் $(A+B)$ என்பதும் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது என்றும் மற்றும் $\dim(A+B)=\dim(A)+\dim B-\dim(A\cap B)$ என்றும் நிறுவுக.

22. If $u, v \in V$, then prove that $|< u, v >| \leq \|u\| \, \|v\|$.

$u, v \in V$ எனில் $|< u, v >| \leq \|u\| \, \|v\|$ என நிறுவுக.

23. If $V$ is finite dimensional vector space over $F$ and if $S, T \in A(V)$ then prove that (a) $r(ST) \leq r(T)$ (b) $r(TS) \leq r(T)$ (c) $r(ST) = r(TS) = r(T)$.

$F$ ன் மீது $V$ என்பது முடிவுறு பரிமாணமுள்ள திசையன் வெளி மற்றும் $S, T \in A(V)$ எனில் (அ) $r(ST) \leq r(T)$ (ஆ) $r(TS) \leq r(T)$ (இ) $r(ST) = r(TS) = r(T)$ என நிறுவுக.

24. Let $V$ be a finite dimensional inner product space and let $W$ be a subspace of $V$. Prove that $V = W \oplus W^{\perp}$.

$W$ என்பது முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உட்பெருகள் வெளியின் உள்வெளி என்றால் $V = W \oplus W^{\perp}$ என நிறுவுக.

---