(6 pages)

APRIL 2021 **72088/TAM6B**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer any TEN questions.

1. Prove that any set with only one point in R_d is open.

   ஒரே ஒரு புள்ளியுடைய கணம் R_d திறந்த கணம் என நிறுவுக.

2. Define a dense set in a metric space (M, ρ).

   மெட்ரிக் வெளி (M, ρ)ல் அடர்த்தியான கணத்தை வரையறுக்க.

3. Prove that $(1/2, 1]$ is open in $[0, 1]$.

   $[0, 1]$ல் $(1/2, 1]$ என்பது திறந்த கணம் என நிறுவுக.

4. Prove that $[0, 1]$ is complete.

   $[0, 1]$ என்பது முழுமையான வெளி என நிறுவுக.

5. State finite intersection property of family of sets.

   கணங்களின் குழுமத்தின் முடிவுறு வெட்டு பண்பை எழுதுக.

6. Verify that $f(x) = \frac{1}{x}$ is uniformly continuous on $(0, 1]$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ என்பது $(0, 1]$ மீது சீரான தொடர்ச்சி என்பதை சரிபார்க்க.

7. Prove that every countable set of R has measure zero.

ஒவ்வொரு எண்ணிடத்தக்க மெய்யெண் கணங்களின் அளவு பூஜ்ஜியம் என நிறுவுக.

8. If $f(x) = x$ on $[0, 1]$ and $\sigma = \{0, 1/8, 1/4, 1/2, 1\}$ is a division, then find $U[f, \sigma)$.

$f(x) = x$ $[0, 1]$ல் மேலும் $\sigma = \{0, 1/8, 1/4, 1/2, 1\}$ ஒரு பிரிவு எனில் $U[f, \sigma)$ வை காண்க.

9. State the law of mean.

சராசரி விதியை எழுது.

10. If $f(x) = x^n$, $-\infty < x < \infty$, then prove that $f'(c) = nc^{n-1}$, $-\infty < x < \infty$.

$f(x) = x^n$, $-\infty < x < \infty$ எனில் $f'(c) = nc^{n-1}$ என நிறுவுக.

11. Prove that $\{f_n\}$ does not converge uniformly on $[0, 1]$ if $f_n(x) = x^n$.

$f_n(x) = x^n$ எனில் $\{f_n\}$, $[0, 1]$ ல் வரிசை சீராக குவிதல் இல்லை என நிறுவுக.

12. Define uniform convergence.

சீரான குவிதலை வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that x is a limit point of set E subset of metric space M if and only if every open ball $B(x, r)$ contains atleast one point of E.

x என்பது மெட்ரிக் வெளி M ன் உட்கணம் E யின் எல்லை புள்ளியாக இருந்தால் இருத்தால் மட்டுமே திறந்த பந்து $B(x, r)$ குறைந்தது E ன் ஒரு புள்ளியையாவது கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

14. Prove that closed subspace of a complete metric space is complete.

ஒரு முழுமையான மெட்ரிக் வெளியின் மூடிய உட்வெளி முழுமையானது என நிறுவுக.

15. If $f \in R[a, b]$ and $g \in R[a, b]$, then prove that $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

$f \in R[a, b]$ மேலும் $g \in R[a, b]$ எனில் $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ என நிறுவுக.

16. If $f \in R[a, b]$, then prove that $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

$f \in R[a, b]$ எனில் $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ என நிறுவுக.

17. If the real valued function f has a derivative at $c \in R$, the prove that f is continuous at c.

மெய்யென் மதிப்புடைய சார்பு f $c \in R$-ல் வகையீடல் கொண்டிருக்குமாயின், f c யில் தொடர்ச்சியாக இருக்கும் என நிறுவுக.

18. If f has a derivative at each point of $[a, b]$, then prove that f' takes on every value between $f'(a)$ and $f'(b)$.

$[a, b]$ உள்ள எல்லா புள்ளிகளுக்கும் f வகை கொண்டிருத்தால் f' என்பது $f'(a)$ மேலும் $f'(b)$ இடையே உள்ள எல்லா மதிப்பையும் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

19. Prove that $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$ on $[0, \infty)$ uniformly converges to 0.

$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-nx}$, $[0, \infty)$ ன் மீது '0'வுக்கு சீராக ஒழுங்கும் என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the function $f : M_1 \to M_2$ is continuous if and only if $f^{-1}(a)$ is open in a metric space M_1 whenever G is open in M_2.

மெட்ரிக் வெளி M_1 லிருந்து M_2 க்கு செல்லும் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருந்தால் இருத்தால் மட்டுமே $f^{-1}(a)$ M_1 ல் திறந்து எப்போதெல்லாம் G, M_2 ல் திறந்திருக்கு போது என நிறுவுக

21. Prove that the subset A of a metric space M is totally bounded if and only every sequence of A contains Cauchy subsequence.

மெட்ரிக் வெளி M ன் உட்கணம் A முழுவதும் வரம்புடையதாக இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே A யில் உள்ள எல்லா தொடர்களும் காஸி உட்தொடர் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

22. State and prove the first fundamental theorem of calculus.

நுன்கணிதத்தின முதல் அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

23. Prove that the bounded function $f \in R[a, b]$ if and only if for $\in > 0$, there exists a subdiviser σ such that $U(f, \sigma) < L(f, \sigma)$.

$[a, b]$-ல் வரம்புடைய சார்பு $f \in R[a, b]$ இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே ஒவ்வொரு $\in > 0$க்கு உட்பிரிவுக்கு $U(f, \sigma) < L(f, \sigma)$ என அமையும் என நிறுவுக.

24. Establish Taylor's formula with Lagrange form of remainder.

லெக்ராஞ் அமைப்பு மீதியுடன் உள்ள டெய்லர் சூத்திரத்தை நிறுவுக.

———————