

(7 pages)

APRIL 2021

72089/TAM6C

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Write the polar form of $C - R$ equations.
 $C - R$ சமன்பாட்டை துருவ உருவில் எழுதுக.
2. Prove that the function $f(z) = e^x (\cos y - i \sin y)$ is no where differentiable.
 $f(z) = e^x (\cos y - i \sin y)$ எனும் சார்பு எங்கும் வகையீடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.
3. Define linear fractional transformation.
நேரியல் பின்ன மாற்றத்தினை வரையறு.
4. What angle of rotation is produced by the transformation $w = \frac{1}{z}$ at the point $z_0 = 1$?
 $z_0 = 1$ என்றபுள்ளியில், $w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றம் எந்த கோணத்தில் சுற்றலை உருவாக்குகிறது.
5. Evaluate $\int_C \frac{\sin z}{(z - \pi/2)} dz$ where C is the circle $|z| = 2$.
 $\int_C \frac{\sin z}{(z - \pi/2)} dz$ ஐ மதிப்பிடுக இங்கு C என்பது $|z| = 2$ என்ற வட்டம் ஆகும்.

6. State Cauchy's integral formula.

காஷியின் தொகையிடல் சூத்திரத்தைக் கூறுக.

7. Find the residue of $f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)}$.

$f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)}$ ன் எச்சம் காண்க.

8. Expand $\cos z$ into a Taylor's series about the point

$z = \frac{\pi}{2}$ and determine the region of convergence.

$z = \frac{\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் $\cos z$ ன் விரிவாக்கத்தை டெய்லர்ஸ் தொடரில் காண்க. மேலும் அது ஒருங்கும் பகுதியைக் காண்க.

9. If a is a simple pole for $f(z)$ and $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ where $g(z)$ is analytic at a and $g(a) \neq 0$, then prove that $\text{Res}\{f(z): a\} = g(a)$.

$f(z)$ ல் a என்பது ஒரு எளிய துருவம் மற்றும் $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ எனில் $\text{Res}\{f(z): a\} = g(a)$ எனக் காண்பி. இங்கு $g(z)$ ஆனது a -ல் வகையிடத்தக்கது மேலும் $g(a) \neq 0$ ஆகும்.

10. Show that $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ when $|z+1| < 1$.

$|z+1| < 1$ எனும் போது, $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ என நிறுவுக.

11. Show that $f(z) = \frac{z^3-1}{z^3+1}$ is zeros of an analytic function.

$f(z) = \frac{z^3-1}{z^3+1}$ என்ற சார்பு பகுமுறைச் சார்பின் பூஜ்ஜியம் என நிறுவுக.

12. Determine and classify the singularities of $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ என்ற சார்பின் ஒருமைத்தன்மையை வகைப்படுத்தி தீர்மானிக்கவும்.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Show that $f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$ is not differentiable at $z = 0$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases} \text{ என்ற சார்பு } z = 0$$

எனும்பொழுது வகையிடல் அல்ல என நிறுவுக.

14. If $f(z)$ is analytic prove that $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$.

$f(z)$ என்பது ஓர் பகுமுறை சார்பு எனில், $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ என நிறுவுக.

15. Show that $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq Ml$ where $M = \max\{|f(z)|/z \in c\}$ and l is the length of C .

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq Ml, \quad \text{இங்கு } M = \max\{|f(z)|/z \in c\}$$

மேலும் l என்பது C -ன் நீளம் என நிறுவுக.

16. Evaluate $\int_C \frac{e^{2z} dz}{(z-1)^4}$ where C is $|z|=3/2$.

C என்பது $|z|=3/2$ எனில் $\int_C \frac{e^{2z} dz}{(z-1)^4}$ ஐ மதிப்பிடுக.

17. State and prove the fundamental theorem of algebra.

இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

18. If $f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ find Laurent's series expansions in $0 < |z-1| < 4$.

$f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ எனில் $0 < |z-1| < 4$ ல் லாரண்ட்ஸ் தொடரின் விரிவாக்கத்தைக் காண்க.

19. Use residue theorem to evaluate $\int \frac{3z^2 + z - 1}{(z^2 - 1)(z - 3)} dz$ around the circle $|z|=2$.

எச்சத் தேற்றத்தினை பயன்படுத்தி $\int \frac{3z^2 + z - 1}{(z^2 - 1)(z - 3)} dz$ ஐ $|z|=2$ என்ற வட்டத்திற்குள் மதிப்பிடுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Find the analytic function $f(z) = u + iv$ if

$$u + v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}.$$

$$u + v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x} \quad \text{எனும்பொழுது}$$

$f(z) = u + iv$ என்ற பகுமுறை சார்பினைக் காண்க.

21. Show that the transformation $w = \cosh z$ maps the semi-infinite strip $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi/2$ in the z -plane on the first quadrant $u \geq 0, v \geq 0$ of the w -plane.

$w = \cosh z$ என்ற உருமாற்றி z -தளத்தில் $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi/2$ என்ற அரை எல்லையற்ற கோடானது w -தளத்தில் $u \geq 0, v \geq 0$ என்ற முதல் பாகத்தில் உருமாற்றம் செய்யும் என நிறுவுக.

22. Show that $\int_C |z|^2 dz = -1 + i$ where C is the square with vertices $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$ and $C(0, 1)$.

C என்ற சதுரத்தின் புள்ளிகள் $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$ மற்றும் $C(0, 1)$ எனில் $\int_C |z|^2 dz = -1 + i$ என நிறுவுக.

23. State and prove Laurent's theorem.

லாரன்ஸ் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

24. Evaluate $\int_C \frac{z+1}{z^2+2z+4} dz$, where C is the circle

$$|z+1+i|=2.$$

(a) Cauchy's integral formula

(b) Residue theorem

மதிப்பிடுக $\int_C \frac{z+1}{z^2+2z+4} dz$, C என்பது $|z+1+i|=2$

எனும் வட்டம்.

(அ) காஷியின் தொகையீடல் சூத்திரம்.

(ஆ) எச்சத் தேற்றம்.