(7 pages)

APRIL 2017 **72007/SAM4A/TAB4A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions each in 30 words.

1. Find $\nabla\phi$ at (x,y,z) if $\phi = \log(x^2+y^2+z^2)$.

   $\phi = \log(x^2+y^2+z^2)$ என இருந்தால், (x,y,z) என்ற புள்ளியில் $\nabla\phi$ கண்டுபிடி.

2. Find the unit vector normal to the surface $x^2+3y^2+2z^2=6$ at the point $(2,0,1)$.

   $x^2+3y^2+2z^2=6$ என்ற தளத்தில் $(2,0,1)$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக உள்ள ஓரலகு வெக்டரை காண்க.

3. If $\vec{a}$ is a constant vector and $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Show that $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{r})=2a$.

   $\vec{a}$ ஒரு மாறிலி திசையன் மற்றும் $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ எனில், $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{r})=2a$ என்பதை நிரூபி.

4. State Green's theorem.

   கிரீனின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

5. Find $\iint_s \vec{F}.\hat{n}\, ds$ for the vector $\vec{F}=x\vec{i}-y\vec{j}+2z\vec{k}$ over the sphere, $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

   $\vec{F}=x\vec{i}-y\vec{j}+2z\vec{k}$ என்ற வெக்டருக்கு $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ என்ற கோளத்தின் மீது $\iint_s \vec{F}.\hat{n}\, ds$ – யை காண்க.

6. If $\vec{F}=3xy\vec{i}-y^2\vec{j}$, Evaluate $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ where c is ithe curve is the xy plane $y=2x^2$ from $(0,0)$ to $(1,2)$.

   $\vec{F}=3xy\vec{i}-y^2\vec{j}$, மற்றும் $y=2x^2$ என்ற வளைவு c –ல் xy – தளத்தில் $(0,0)$–வில் இருந்து $(1;2)$ வரை வேறுபடுகிறது எனில் $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.

7. Define Fourier series.

   ஃபோரியர் தொடரை விவரி.

8. Obtain the Fourier sine series for $f(x)=1,\ 0<x<\pi$.

   $f(x)=1,\ 0<x<\pi$ எனில், ஃபோரியர் சைன் தொடரை கண்டுபிடி.

9. State the Dirichlet's condition that a function does a Fourier expansion.

   ஒரு சார்புக்கு ஃபோரியர் விரிவாக்கம் இருப்பதற்கான டிரிச்லெட்டின் நிபந்தனையைக் கூறுக.

II B.Sc Maths Paper VII Vector calculus, Fourier series and Fourier Transforms.

10. State the Parseval's identity.

    பார்சீவலின் முற்றொருமையைக் கூறுக.

11. State Fourier integral theorem.

    ஃபோரியர் இண்டக்ரல் தேற்றத்தை எழுதுக.

12. If the Fourier transform of $f(x)$ is $F(s)$, then show that the Fourier transform of $\overline{f(-x)}$ is $\overline{F(-s)}$.

    $f(x)$ என்பதின் ஃபோரியர் உருமாற்றம் $F(s)$ எனில், $\overline{f(-x)}$–ன் உருமாற்றம் $\overline{F(-s)}$ என நிரூபி.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that $\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla.\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$.

    $\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla.\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$ என நிறுவுக.

14. Evaluate : $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ when $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}-2xy\vec{j}$ and the curve c is the rectangle in the xy-plane bounded by $y=0, x=a, y=b, x=0$.

    $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}-2xy\vec{j}$ எனில் $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ –ஐ மதிப்பிடுக. இங்கு c என்பது $y=0, x=a, y=b, x=0$–யினால் அடைபடும் செவ்வகம் ஆகும்.

15. Evaluate $\iint_s \vec{F}.\vec{n}\, ds$ where $\vec{F}=18z\vec{i}-12\vec{j}+3y\vec{k}$ and S is the part of the plane $2x+3y+6z=12$ which is located in the first quadrant.

    S என்பது $2x+3y+6z=12$ என்ற தள வரைபடத்தில் முதல் பகுதியாகவும் $\vec{F}=18z\vec{i}-12\vec{j}+3y\vec{k}$ திசையெண்ணாகவும் இருப்பின் $\iint_s \vec{F}.\vec{n}\, ds$ ஐக் கண்டுபிடி.

16. Obtain the half range cosine series for function $f(x)=x$ is $0<x<\pi$ and deduce the sum of the series $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\infty$.

    $0<x<\pi$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)=x$ என்பதற்கான ஃபோரியர் கொசைன் தொடரைக் காண்க. அதிலிருந்து $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\infty$ –ன் மதிப்பினைக் கண்டுபிடி.

17. Obtain the Fourier expansion for the function $f(x)=\pi^2-x^2;\ -\pi<x<\pi$.

    $f(x)=\pi^2-x^2;\ -\pi<x<\pi$ எனில், அதன் ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

[P.T.O.]

18. Find the Fourier transform of $f(x)=\begin{cases} x, |x|<a \\ 0, |x|>a \end{cases}$.

$f(x)=\begin{cases} x, |x|<a \\ 0, |x|>a \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் உருமாற்றம் கண்டுபிடி.

19. Find the inverse sine transform of $\frac{1}{s}e^{-as}$.

$\frac{1}{s}e^{-as}$ என்பதின் ஃபோரியர் தலைகீழ் சைன் உருமாற்றம் காண்க.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. If $|\vec{r}|=r$, where $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, prove that

(a) $\nabla \log|\vec{r}|=\frac{\vec{r}}{r^2}$

(b) $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$

(c) $\nabla f(r)=f'(r)\nabla \vec{r}$

(d) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

$|\vec{r}|=r$ எனில் மற்றும் $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

(அ) $\nabla \log|\vec{r}|=\frac{\vec{r}}{r^2}$

(ஆ) $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$

(இ) $\nabla f(r)=f'(r)\nabla \vec{r}$

(ஈ) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$

21. Verify Stoke's theorem when $\vec{F}=y\vec{i}+(x-2xz)\vec{j}-xy\vec{k}$ and surface is the part of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$ above the $x.y$-plane.

xy-தளத்திற்கு மேல் உள்ள $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளின் ஒரு பகுதியாகவும் திசையன் $\vec{F}=y\vec{i}+(x-2xz)\vec{j}-xy\vec{k}$ எனவும் இருப்பின் ஸ்டோக் தேற்றத்தை ஆய்க.

22. Verify Green's theorem in the plane for $\int_c (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$ where c is the boundary of the region defined by $y=\sqrt{x}, y=x^2$.

கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_c (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$ – ன் மதிப்பை காண்க. இதில் c என்பது $y=\sqrt{x}$ மற்றும் $y=x^2$ என்ற வளையறையால் சூழப்பட்டுள்ளது.

23. A function is defined with range $(0,2\pi)$ by the relation $f(x)=\begin{cases} x, & \text{is the range } (0,\pi) \\ 2\pi-x, & \text{in the range } (\pi,2\pi) \end{cases}$ express $f(x)$ as fourier series in the range $(0,2\pi)$.

$(0,2\pi)$ என்ற செயற்பாட்டு முறைமையின் மூலம்

$f(x)=\begin{cases} x, & (0,\pi) \text{ யில்} \\ 2\pi-x, & (\pi,2\pi)\text{–யில்} \end{cases}$

$f(x)$ என்பதற்கு கால முறைமை $(0,2\pi)$ உள்ள ஃபோரியர் தொடரைக் கண்டுபிடி.

24. Find the Fourier transform of $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, |x|\le 1 \\ 0, \quad |x|>1 \end{cases}$ and evalute $\int_0^\infty \left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}dx$.

$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, |x|\le 1 \\ 0, \quad |x|>1 \end{cases}$ –ன் ஃபோரியர் உருமாற்றத்தைக் கண்டுபிடி. அதிலிருந்து $\int_0^\infty \left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}dx$ –ன் மதிப்பைக் காண்க.