221408225.

(8 pages)

APRIL 2017 **72009/SAM5A/ TAB5A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Show that if every element of the group G is its own inverse, then G is abelian.

   G-ல் உள்ள ஒவ்வொறு உறுப்புக்கும் அதுவே தலைகீழ் உறுப்பு என்றால், G ஒரு எபிலியன் குலம் என நிறுவுக.

2. If G is a finite group and $a \in G$, then prove that $O(a) \mid O(G)$.

   G என்பது ஓர் முடியுரு குலம் மற்றும் $a \in G$ எனில் $O(a) \mid O(G)$ என நிறுவுக.

3. Give an example that normal group need not be abelian.

   ஒரு நேர்மை குலம் எபிலியனாக இருக்க தேவையில்லை என ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

4. Prove that any sub group of a cyclic group is itself a cyclic group.

   ஒரு சுழல் குலத்தின் எந்த உட்குலமும் சுழல் குலமே என நிறுவுக.

5. If ϕ is a homomorphism of G into $\overline{G}$, then prove that (a) $\phi(e) = \overline{e}$, the unit element of $\overline{G}$ (b) $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$ for all $x \in G$.

   ϕ என்பது G-ஐ $\overline{G}$-ல் செலுத்தும் ஒரு செயல் மாறக் கோர்த்தல் எனில் (அ) $\phi(e) = \overline{e}$, $\overline{G}$-ன் அலகு உறுப்பு, (ஆ) $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1} \forall x \in G$ என நிறுவுக.

6. Let G be a group and ϕ an automorphism of G. If $a \in G$ is of order $0(a) > 0$, then prove that $0(\phi(a)) = 0(a)$.

   G என்பது ஓர் குலம் மற்றும் ϕ என்பது G-ஐ Gக்கு செலுத்தும் இயல்மாறாக் கோர்த்தல் என்க. $0(a) > 0$, $a \in G$ எனில் $0(\phi(a)) = 0(a)$ என நிறுவுக.

7. If F is a field, prove its only ideals are (0) and F itself.

   F என்பது ஒரு களம் எனில், F-ன் சீர்மங்கள் (0) மற்றும் F மட்டுமே என்று நிறுவுக.

III) B.SC Maths - Paper-IX Algebraic Structures - I

8. If ϕ is a homomorphism form ring R into R' with Kernal $I(\phi) = [0]$, then what can you say about ϕ? Justify.

   ϕ என்பது வளையம் Rஐ வளையம் R'க்கு ஒரு செயல்மாறக் கோர்த்தல் மற்றும் $I(\phi) = [0]$ என்ற உட்கரு கொண்டது என்றால் ϕ-ஐப் பற்றி நீ என்ன கூற முடியும்? உன்பதிலுக்கான விளக்கம் தருக.

9. Define Euclidean ring. Give an example of a Euclidean ring.

   யூக்ளிடியன் வளையத்தினை வறையறு. யூக்ளிடியன் வளையத்திற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

10. Prove that if an ideal U of R contains a unit of R, then $U = R$.

    Rன் ஒரு சீர்மம் U, Rன் ஒரு அலகு கொண்டால், $U = R$ என நிறுவுக.

11. Find all the units in $J[i]$.

    $J[i]$ன் அனைத்து அலகுகளையும் காண்க.

12. If 'a' is a unit element of Euclidean ring R, prove that $d(a) = d(1)$.

    'a' என்பது யூக்ளிடியன் வளையம் Rன் ஓர் அலகு உறுப்பு என்றால், $d(a) = d(1)$ என நிறுவுக.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that a non empty subset H of the group G is a subgroup of G if and only if

    (a) $a, b \in H$ implies that $ab \in H$

    (b) $a \in H$ implies that $a^{-1} \in H$.

    G என்ற குலத்தின் ஓர் வெற்று அற்ற உட்கணம், Gன் உட்குலமாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதும் நிபந்தனை

    (அ) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

    (ஆ) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ என நிறுவுக.

14. State and prove fundamental theorem of group homomorphism.

    குலத்தின் செயல்மாறக் கோர்தலுக்கான அடிப்படை தேற்றத்தினை எழுதி நிறுவுக.

15. Compute $a^{-1}ba$, where

    $a = (1, 3, 5)(1, 2)$, $b = (1, 5, 7, 9)$.

    $a = (1, 3, 5)(1, 2)$, $b = (1, 5, 7, 9)$ எனில் $a^{-1}ba$ ஐக் காண்க.

16. If G is a group, then prove that $A(G)$, the set of automorphisms of G, is also a group.

G என்பது ஒரு குலம் எனில், Gன் தன்னிலைமாறாக் கோர்க்கும் சார்பின் தொகுப்பாகிய $A(G)$ யும் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

17. Prove that finite integral domain is field.

எந்த ஒரு முடியுறு எண் அரங்கமும் ஒரு களம் என நிறுவுக.

18. Let R b a ring with unit element, R non necessarily commutative such that the only right ideals of R are (O) and R, then prove that R is a division ring.

அலகு உறுப்பை கொண்ட வளையம் R என்க. (O) மற்றும் R-ஐ மட்டும் வலது சீர்மங்களாக கொண்டதும், பரிமாற்று பண்பு தேவையில்லாததும் எனில் R ஒரு வகுத்தல் வளையம் என நிறுவுக.

19. Let R be a Euclidean ring and let A be an ideal of R. Prove that there exists an element $a_0 \in A$ such that A consists exactly of all $a_0 x$ as x ranges over R.

R என்பது ஒரு யூக்லூடியன் வளையம் மற்றும் A என்பது Rன் சீர்மம் என்க. A -ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $a_0 x$ என்ற வடிவில் இருக்கும் என நிறுவுக. இவ்வாறு உருவாக்குகின்ற $a_0 \in A$, $x \in R$ ஐ காணலாம்.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. (a) State and prove Euler's theorem.

(b) If in the group G, $a^5 = e$, $aba^{-1} = b^2$ for some $a, b \in G$, find $O(b)$.

(அ) யூலரின் தேற்றத்தினை எழுது நிறுவுக.

(ஆ) G என்ற குலத்தில், $a^5 = e$, $aba^{-1} = b^2$ என்றவாறு உள்ள ஏதேனும் உறுப்புகள் $a, b \in G$ என்றால் $O(b)$ ஐ காண்க.

21. State and prove Sylow's theorem for Abelian groups.

எபிலியன் குலத்திற்கான ஸைலோ தேற்றத்தினை எழுதி நிறுவுக.

22. (a) If G is a group, H a subgroup of G, and S is the set of all right cosets of H in G, then prove that there is a homomorphism θ of G into $A(S)$ and the Kernel of θ is the largest normal subgroup of G which is contained in H.

(b) Prove that every permutation is the product of 2 – cycles.

(அ) G என்பது ஒரு குலம், Gன் உட்குலம் H மற்றும் S என்பது H-ன் அனைத்து வலது கோ செட்டின் தொகுப்பு என்றால், G-ஐயும் $A(S)$-ஐயும் செயல்மாற செலுத்தி கோர்க்கும் சார்பு θ ஐ காணலாம் என நிறுவுக. மேலும் θன் உட்கரு G-ன் மிகப்பெரிய நேர்மை உட்குளமாகவும், H ஐ உள்ளடக்கியதுமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

(ஆ) எந்த ஒரு வரிசை மாற்றத்தையும் 2-சுழல்களின் பெருக்கலாக எழுதலாம் என நிறுவுக.

23. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

எந்தவொரு எண் அரங்கத்தையும் ஒரு களத்தில் பதிக்க முடியும் என்று நிறுவுக.

24. (a) Let R be a Euclidean ring. Prove that any two elements 'a' and 'b' in R have a greatest common divisor d. Moreover prove that $d = \lambda a + \mu b$ for some $\lambda, \mu \in R$.

(b) Prove that a necessary and sufficient condition that the element 'a' in the Euclidean ring be a unit is that $d(a) = d(1)$.

(அ) R என்பது ஒரு யூக்லிடியன் வளையம் என்க. Rன் ஏதேனும் இரு உறுப்பு 'a','b'ன் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d என நிறுவுக மேலும் $d = \lambda a + \mu b$, for all $\lambda, \mu \in R$, என நிறுவுக.

(ஆ) யூக்குலிடியன் வளையத்தில் 'a' அலகாக இருக்க தேவையானதும் மற்றும் போதுமான நிடந்தனை $d(a) = d(1)$ என நிறுவுக.