

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Define a function from a set  $A$  into a set  $B$ .  
கணம்  $A$  லிலிருந்து கணம்  $B$ க்கு ஒரு சார்பை வரையறு.
2. Define a real valued function.  
ஒரு மெய்திப்பு சார்பை வரையறு.
3. Define a one-to-one function.  
ஒரு one-to-one சார்பினை வரையறு.
4. Define an upper bound of a set  $A$ .  
கணம்  $A$  யின் மேல்வரம்பு – வரையறு.
5. Denote the sequence  $1, 0, 1, 0, \dots$  by  $B$  and define  
 $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  by  $n_i = 2i - 1, i \in I$  computer  $B \circ N$ .  
1, 0, 1, 0, ... என் தொடர் வரிசையை  $B$  என குறிக்க மற்றும்  $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  என்பதை  $n_i = 2i - 1, i \in I$  என்றும் வரையறுத்தால்  $B \circ N$  கணக்கிடுக.

## II) BSC - Paper - X Real Analysis I

2 72010/SAM5B/TAB5B

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. If  $A_1, A_2, \dots, \infty$  are countable sets then prove that  
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  is a countable set.  
 $A_1, A_2, \dots, \infty$  என்பன எண்ணத்துக் கணங்கள் எனில்  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  ஒரு எண்ணத்துக் கணம் என நிறுவுக.
  14. Prove that the set  $[0, 1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$  is uncountable.  
 $[0, 1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$  என் கணம் எண்ணிட முடியாத கணம் என நிறுவுக.
  15. If  $A$  is any non empty subset of  $R$  that is bounded below, prove that  $A$  has a greatest lower bound in  $R$ .  
 $A$  என்பது  $R$  ன் ஒரு வெற்றற் கீழ்வரம்பிற்குட்பட்ட உட்கணம் எனில்  $R$  ல்  $A - \text{இரு மீப்பெரு கீழ்வரம்பை பெற்றிருக்கின்றது என நிறுவுக.$
16. If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a sequence of non negative numbers and if  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ , prove that  $L \geq 0$ .  
 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது குறையற் எண்களின் வரிசை தொடர் எண்றும் மீலும்  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$  என்றும் கொண்டால்  $L \geq 0$  என நிறுவுக.
  17. If the sequence of real numbers  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is convergent prove that  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is bounded.  
 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என் மெய் எண்களின் வரிசை தொடர் ஒருக்கும் எனில்  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது வரம்பிற்குட்பட்டது என நிறுவுக.
  18. If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a Cauchy sequence of real numbers, prove that  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is bounded.  
 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது மெய் எண்களால் ஆன ஒரு கோலிபிள் வரிசைத் தொடர் எனில்  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது வரம்பிற்குட்பட்டது என நிறுவுக.
  19. Prove that series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  is divergent.  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  என் தொடர் விரியம் என நிறுவுக.

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

6. Define limit of a sequence.

7. Define a convergent sequence.

8. Define a bounded sequence.

9. Define a Cauchy sequence.

கோளி தொடர்வரிசையை வரையறு.

10. Define absolutely convergence.

முழுமையான ஒருக்கம் வரையறு.

11. Give an example of a conditionally convergent series.

நிபந்தனையடி ஒருங்கும் தொடர்க்கு எடுத்துக்காட்டுக் காலி விதம் அடிக்கடி வரையறு.

12. Define a metric space.

ஒரு யாப்பு வெளியை வரையறு.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that a non decreasing sequence which is bounded above is convergent.

மேல் வருமிற்குட்டாட கணறயம் அல்லாத வரிசைத்தொடர் ஓருங்கும் என நிறுவக.

21. Prove that

(a) If  $0 < x < 1$ , then  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  converges to 0.

(b) If  $1 < x < \infty$ , then  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  diverges to  $\infty$ .

(ஆ)  $0 < x < 1$  எனில்  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  விர்த்த ஓருங்கும் என்றும்

(ஆ)  $1 < x < \infty$  எனில்  $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$  ஒரு விரியும் என்றும் நிறுவக.

22. If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a convergent sequence of real numbers then prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup } S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது மொப்பெண்களால் ஆன ஓருங்கும் வரிசைத் தொடர் எனில்  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup } S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  என நிறுவக.

5 : 72010/SAM5B/TAB5B

23. If  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a non increasing sequence of positive numbers and if  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges then prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  என்பது மிகை எண்களால் ஆன எந்றமில்லா வரிசைத் தொடர் என்றும்  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ஓருங்கும் என்றும் கொண்டால்  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$  என நிறுவக.
24. Let  $(M, \rho)$  be a metric space. If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a convergent sequence of points of  $M$ , then prove that  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a Cauchy sequence.
- $(M, \rho)$  ஒரு யாப்பு வெளி எனக்.  $M$  ன் பள்ளிகளின் மீது  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  ஒரு ஓருங்கும் வரிசைத் தொடர் எனில்  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  ஒரு கோலியில் வரிசை தொடர் என நிறுவக.

6 : 72010/SAM5B/TAB5B