

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

- Let V be a vector space over F . Prove that $\alpha O = O, \alpha \in F$.
 F என்றால் வெக்டர்வெளி V என்க. $\alpha O = O, \alpha \in F$ என்றுவருக.
- Let S be a nonempty subset of a vector space V . Define $L(S)$.
 V என்ற வெக்டர்வெளி மின் வெற்றற்ற உட்கணம் S என்க.
 $L(S)$ யின் வரையறை.
- When do you say that the vectors v_1, v_2, \dots, v_n of V is linearly independent.
 V யின் வெக்டர்களான v_1, v_2, \dots, v_n —யை எப்பொழுது ஒரு படிச்சாராதல்ல என்கூறுவீர்கள்?
- What is the dimension of V over F ?
 F -ன் மீதான V -மின் பரிமாணம் என்றால் என்ன?

11 B.Sc (Maths) - Algebraic Structures 11

2 72013/SAM6AV
TAB6A

- If $\dim_F V = 10$ then compute the value of $\dim_F \text{Hom}(V, v)$.
 F எனில் $\dim_F \text{Hom}(V, v)$ -ன் மதிப்பைக் கணிக்க.
- Let V be a vector space over F . Let $u, v, w \in V$ and let $\alpha, \beta \in F$. If V is an inner product space, then find the value of $(\alpha u + \beta v, w)$.
 F என்றால் வெக்டர்வெளி V என்க. $u, v, w \in V$ மற்றும் $\alpha, \beta \in F$ என்க. V ஒரு உள்பெருக்கல்வெளி எனில் $(\alpha u + \beta v, w)$ ன் மதிப்பைக் காணக.
- When do you say that $u, v \in V$ are orthogonal?
 $u, v \in V$ என்பன எப்பொழுது செங்குத்தானவை என்கூறுவாய்?
- Let $T \in A(V)$. Then what is the value of VT ?
 $T \in A(V)$ என்க. VT யின் மதிப்பு என்ன?
- Define the rank of $T \in A(V)$.
 $T \in A(V)$ யின் தாத்தை வரையறை.
- Define the characteristic root of $T \in A(V)$.
 $T \in A(V)$ யின் பண்பை மூலத்தை வரையறை.

1 72013/SAM6AV
TAB6A

F ன் மீதான முடிவறு பரிமாணங்களைக் கொண்ட வெக்டர்வெளி V என்க. $S, T \in A(V)$ என்க.

- (அ) $r(ST) \leq r(T)$
- (ஆ) $r(TS) \leq r(T)$.

PART C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that if v_1, v_2, \dots, v_n are in V then either they are linearly independent or some v_k is a linear combination of the proceeding ones v_1, \dots, v_{k-1} .
- v_1, v_2, \dots, v_n என்பன V மினில் இருப்பின் அவைகள் ஒருபடிச் சாராதவைகளாகவோ அல்லது சில v_k என்பவை அதன் முந்திகளான v_1, \dots, v_{k-1} என்பவைகளின் ஒரு படிக்கல்லையாக இருக்கும் என நிறுவக.
21. If A and B are finite dimensional subspace of a vector space V , then prove that $A + B$ is finite dimensional and $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.
- V என்ற வெக்டர்வெளியின் முடிவறு உள்வெளிகளாக A மற்றும் B உள்ளன என்றால் $A + B$ என்பதும் ஒரு முடிவறு பரிமாணமுள்ளதென்றும் $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ ஆகும் என்றும் நிறுவக.

5 72013/SAM6A/
TAB6A

6 72013/SAM6A/
TAB6A

22. If V is finite-dimensional and W is a subspace of V then prove that \hat{W} is isomorphic to $\hat{V}/A(W)$ and $\dim A(W) = \dim V - \dim W$.

V ஒரு முடிவறு பரிமாணமுடையது என்றும் மற்றும் W என்கு V யின் உள்வெளி என்றும் கொண்டால் $\hat{W} = \hat{V}/A(W)$ —வெம் சம் உருவுள்ளன என்றும் $\dim A(W) = \dim V - \dim W$ என்றும் நிறுவக.

23. If $u, v \in V$ then prove that $\|u, v\| \leq \|u\| \|v\|$ என நிறுவக.
- $u, v \in V$ எனில் $\|u, v\| \leq \|u\| \|v\|$ என நிறுவக.
24. If V is finite dimensional inner product space over F , prove that $T \in A(V)$ is invertible if and only if the constant term of the minimal polynomial for T is not 0.

F ன் மீதான முடிவறு பரிமாணமான முடைய உள்பெருக்கல் வெளி V எனில் $T \in A(V)$ இன் வெங்கில் –ஆக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை T க்கான மீச்சிறு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலி உறுப்புச்சியம் அல்ல என நிறுவக.