(6 pages)

NOVEMBER 2017 **72014/SAM6B/TAB6B**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Is $\{a\}$ open in R_d (or) in R'. Justify your answer.

   $\{a\}$ என்ற கணம் R_d யில் திறந்த கணமா அல்லது R'ல் திறந்த கணமா. விடைக்கு விளக்கம் தருக.

2. Show that any open interval (a, b) of R is of type F_σ.

   R ல் உள்ள எந்த ஒரு இடைவெளி (a, b)யும் F_σ வகையைச் சார்ந்தது என நிரூபி.

3. Define a no where dense set.

   எங்கும் அடர்த்தியற்ற கணத்தை வரையறு.

4. Define a complete metric space.

   முழுமையான மெட்ரிக் வெளியை வரையறு.

5. Show that R' with usual metric is not compact.

   வழக்கமான மெட்ரிக்கில் R' கச்சிதமானதல்ல என நிரூபி.

6. Define uniform continuity of a function in a metric space.

   ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் சீரான தொடர்ச்சியுடைய சார்பை வரையறு.

7. Show that every countable set of R has measure zero.

   R ல் உள்ள எந்த ஒரு எண்ணிடத்தக்க கணமும் அளவு பூஜ்யம் கொண்ட கணம் என நிரூபி.

8. If the real valued function f has a derivative at $C \in R'$, show that f is continuous at C.

   $C \in R'$ல் மெய்யெண் சார்பு fக்கு வகைகெழு உள்ளது எனில் C யில் f தொடர்ச்சியானது என நிறுவு.

9. Find a point C of Rolle's theorem for $f(x) = (x-a)(x-b)$, $a \le x \le b$.

   ரோலின் தேற்றம் கொண்டு $f(x) = (x-a)(x-b)$, $a \le x \le b$ என்ற சார்பிற்கு C ஐ காண்க.

10. If $f'(x) = g'(x)$ for all x in the closed interval $[a, b]$ show that $f - g$ is constant.

    $f'(x) = g'(x)$, எல்லா x-ம் $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் இருந்தால், $f - g$ ஒரு மாறிலி என நிரூபி.

III B.SC (Maths) - Real Analysis II

11. Define Riemann integral.

    ரீமான தொகையிடலை வரையறு.

12. Define pointwise convergence of a sequence of functions.

    சார்புகளின் தொடர்முறை புள்ளி வழி ஒருங்குதலை வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. If the real valued function f is continuous at $a \in R'$ show that $\underset{n\to\infty}{lt}\, x_n = a \Rightarrow \underset{n\to\infty}{lt}\, f(x_n) = f(a)$.

    மெய்யெண் சார்பு f என்பது $a \in R'$ல் தொடர்ச்சியானது எனில் $\underset{n\to\infty}{lt}\, x_n = a \Rightarrow \underset{n\to\infty}{lt}\, f(x_n) = f(a)$ என நிரூபி.

14. If $\mathcal{F}$ is a family of closed subsets of M show that $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ is closed.

    M ன் மூடிய உபகணங்களைக் கொண்ட குடும்பம் $\mathcal{F}$ எனில் $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ மூடியது என நிரூபி.

15. If the subset A of the metric space $<M, \rho>$ is totally bounded show that A is bounded.

    மெட்ரிக் வெளி $<M, \rho>$ன் உட்கணம் A முற்றிலும் வரம்புடையது எனில் A வரம்புடையது என நிரூபி.

16. Show that a closed subset of a complete metric space is complete.

    முழுமையான மெட்ரிக்வெளியின் மூடிய உட்கணம் முழுமையானது என நிரூபி.

17. If $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $a < c < b$ show, that $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ and $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

    $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $a < c < b$ எனில் $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ என்றும் $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ என நிரூபி.

18. If f has a derivative at every point of $[a, b]$ show that f' takes an every value between $f'(a)$ and $f'(b)$.

    $[a, b]$ ன் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் f க்கு வகைகெழு உள்ளது எனில் $f'(a)$ மற்றும் $f'(b)$க்கு இடையே உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பையும் f' பெறும் என நிரூபி.

[P.T.O.]

19. State and prove second mean value theorem for integrals.

தொகையீட்டிற்கான இரண்டாவது சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை கூறி நிரூபி.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. (a) If f and g are real valued functions and if f is continuous at a, and g is continuous at $f(a)$ show that $g \circ f$ is continuous at a. (6)

(b) Define an open set and a closed set. (4)

(அ) மெய்யெண் சார்புகள் f மற்றும் g என்க. 'a' யில் f தொடர்ச்சியானது, $f(a)$ யில் g தொடர்ச்சியானது எனில் $g \circ f$ தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

(ஆ) திறந்த கணம் மற்றும் முடிய கணம் வரையறு.

21. Show that R' is of second category.

R' இரண்டாம் வகையைச் சார்ந்தது என நிரூபி.

22. State and prove Picard fixed point theorem.

பிகார்டின் நிலைத்த புள்ளி தேற்றத்தை கூறி நிரூபி.

23. State and prove fundamental theorem of calculus.

நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை கூறி நிரூபி.

24. State and prove Taylor's formula with Lagrange form of Remainder.

லக்ராஞ்சின் மீதியுடன் கூடிய டெய்லர் வாய்ப்பாட்டை கூறி நிரூபி.

———————