(6 pages)

APRIL 2017 **72013/SAM6A/TAB6A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Define: Vector space.

   வெக்டர் வெளி – வரையறு.

2. Prove that the kernel of a homomorphism is a subspace.

   செயல்மாறா கோர்த்தலின் உட்கரு ஓர் உள் வெளி என நிரூபி.

3. Define: Annihilator of a subspace W.

   உள்வெளி W ன் அழிப்பான் – வரையறு.

4. In an inner product space V, show that $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, where $\alpha \in F, u \in V$.

   உள்பெருக்கு வெளி V–யில் $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ $\alpha \in F, u \in V$ எனக் காட்டு.

5. If W is a subspace of an inner product space V. Then show that the orthogonal complement of W is a subspace of V.

   உள் பெருக்கு வெளி V–யின் உள்வெளி W எனில் W –ன் செங்குத்து நிரப்பி V –ன் உள்வெளி எனக் காட்டு.

6. If $\dim_F V = m$, then find $\dim_F Hom(V,F)$.

   $\dim_F V = m$ எனில் $\dim_F Hom(V,F)$–ஐ காண்க.

7. Define: Algebra over F.

   F –ன் மீது அல்ஜீப்ரா – வரையறு.

8. If V is finite-dim over F, and if $T \in A(V)$ is right invertible then prove that it is invertible.

   F –ன் மீது V முடிவுறு பரிமாணம் உடையது. மேலும் $T \in A(V)$ வலது நேர்மாறிடக்கூடியது எனில் அது நேர்மாறிடக்கூடியது எனக் காட்டு.

9. If $T \in A(V)$, and if $S \in A(V)$ is regular then prove that $r(T) = r(STS^{-1})$

   $T \in A(V)$ மற்றும் $S \in A(V)$ நேர்மாறுடையது எனில் $r(T) = r(STS^{-1})$ என நிரூபி.

10. Let V be two-dimensional over the field F of real numbers. Then find the characteristic roots of T defined by $v_1T = 5v_1 + 6v_2, v_2T = -7v_2$.

    மெய் எண் களம் F மீது வரையறுக்கப்பட்ட இரு பரிமாண வெக்டர் வெளி V, நேரியல் உருமாற்றம் T–யானது $v_1T = 5v_1 + 6v_2$, $v_2T = -7v_2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதெனில் T–ன் சிறப்பியல்பு மூலங்களை காண்க.

III B.Sc (Maths) Paper - XIII Algebraic Structures - II

72013/SAM6A/TAB6A

11. Compute the matrix product: $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

    $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிப்பெருக்கலைக் கணக்கிடுக.

12. Define : Invariant subspace.

    மாறா உள்வெளி – வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Let T be defined on $F^{(3)}$ by $(x_1, x_2, x_3)\,T = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)$. Show that T is a homomorphism of $F^{(3)}$ into itself.

    $F^{(3)}$ மீது T ஆனது $(x_1, x_2, x_3)T = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $F^{(3)}$ லிருந்து $F^{(3)}$ க்கு T ஆனது ஓர் செயல்மாறாக் கோர்த்தல் எனக்காட்டு.

14. If $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in V are linearly independent, then prove that every element in this linear span has a unique representation in the form $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ with $\lambda_1 \in F$.

    வெக்டர் வெளி V யிலுள்ள $v_1, v_2, \ldots, v_n$ நேரியல் சாராதன எனில் அதன் நேரிய விரிவில் உள்ள எந்தவொரு உறுப்புக்கும் $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$, $\lambda_1 \in F$ என்ற ஒரேயொரு வடிவம் மட்டுமே இருக்கும் என நிரூபி.

15. Show that $A(A(W)) = W$.

    $A(A(W)) = W$ எனக் காட்டு.

16. If V is a finite-dimensional inner product space, and W is a subspace of V, prove $= (W^{\perp})^{1} = W$.

    முடிவுறு பரிமாணம் உடைய உள் பெருக்கு வெளி V, அதன் உள்வெளி W எனில் $(W^{\perp})^{1} = W$ என நிரூபி.

17. Let A be an algebra, with unit element, over F, and suppose that A is of dimension m over F. Then prove that every element in A satisfies some nontrivial polynomial in $F(x)$ of degree at most m.

    F –ன் மீது சமனி உறுப்புடைய அல்ஜீப்ரா A. மேலும் F –ன் மீது A –ன் பரிமாணம் m எனில் A –ல் உள்ள எந்தவொரு உறுப்பும் $F(x)$ –லுள்ள மீப்பெரு படி m உடைய அற்பமற்ற பல்லுறுப்பான நிறைவு செய்யும் என நிரூபி.

18. If V is finite-dimensional over F, then for $S, T \in A(V)$, prove that $r(ST) = r(TS) = r(T)$ for S regular in $A(V)$.

    F மீது முடிவுறு பரிமாணம் உடைய வெக்டர் வெளி V. $S, T \in A(V)$ களுக்கு $r(ST) = r(TS) = r(T)$ என நிரூபி. இங்கு S என்பது $A(V)$ –யில் நேர்மாறிடக்கூடியது.

19. Prove that the relation of similarity is an equivalence relation in $A(V)$.

$A(V)$ யில் வரையறுக்கப்பட்ட ஒத்த தொடர்பு ஓர் சமான தொடர்பு என நிரூபி.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. If V is a finite-dimensional and if W is a subspace of V, then prove that W is finite-dimensional, $\dim W \leq \dim V$ and $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

V முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது மற்றும் W அதன் உள்வெளி எனில் W முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது என நிரூபி. மேலும் $\dim W \leq \dim V$ மற்றும் $\dim V/W = \dim V - \dim W$ எனக் காட்டு.

21. Let V be a finite dimensional inner product space. Then prove that V has an orthonormal set as a basis.

V முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உள் பெருக்கு வெளி எனில் அதற்கு செங்குத்து அலகு கணம் இருக்கும் என நிரூபி.

22. If $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda n$ in F are distinct characteristic roots of $T \in A(V)$ and if $v_1, v_2, \ldots v_k$ are characteristic vectors of T belonging to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ respectively, then prove that $v_1, v_2, \ldots v_k$ are linearly independent over F.

F ல் உள்ள $T \in A(V)$ வெவ்வேறான சிறப்பியல்பு மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda n$ மற்றும் $T \in A(V)$ என்பதன் என்ற சிறப்பியல்பு மூலங்களுக்கீடான T–ன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் $v_1, v_2, \ldots v_k$ எனில் F மீது $v_1, v_2, \ldots v_k$ நேரியல் சாதாரண எனக்காட்டு.

23. If V is n-dimensional over F, and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, then prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

F மீது V–யின் பரிமாணம் n மற்றும் $T \in A(V)$ –ன் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் அனைத்தும் F–ல் இருக்குமெனில் F–ன் மீது படி n உடைய பல்லுறுப்பானை T–யானது நிறைவு செய்யும் என நிரூபி.

24. Let V be the vector space of polynomials of degree 3 or less over F. In V define T by $T(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) = \alpha_0 + \alpha_1(x+1) + \alpha_2(x+1)^2 + \alpha_3(x+1)^3$. Compute the matrix of T in the basis of $1, 1+x, 1+x^2$ and $1+x^3$.

F மீது 3 அல்லது அதற்கு குறைவான படி உடைய பல்லுறுப்பான்கள் கொண்ட வெக்டர் வெளி V என்க. V–யில் $T(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) = \alpha_0 + \alpha_1(x+1) + \alpha_2(x+1)^2 + \alpha_3(x+1)^3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் T –ன் அணியை $1, 1+x, 1+x^2$ மற்றும் $1+x^3$ என்ற அடிக்கணத்தில் கணக்கிடுக.