(6 pages)

APRIL 2020 **72087/TAM6A**

Time : $1\frac{1}{2}$ hours Maximum : 75 marks

PART A — (5 × 3 = 15 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Define the homomorphism of a vector space.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் புனல் சார்பு என்பதை வரையறு.

2. If S and T are subsets of V, then prove that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

V யின் உட்கணங்கள் S மற்றும் T என்க. $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ என நிறுவுக.

3. If $\dim_F V = m$ then what is the dimension of $Hom(V, V)$?

$\dim_F V = m$ எனில், $Hom(V, V)$ யின் பரிமாணம் என்ன?

4. If V is a vector space then what is its dual space?

V என்பது ஒரு வெக்டர் வெளி எனில் அதன் இருமை வெளி என்பது என்ன?

5. Let V be a inner product space. Let $u, v, w \in V$ and $\alpha \in F$. Then $(\alpha u + \beta v, w) = ?$

V ஒரு உள்பெருக்கு வெளி என்க. $u, v, w \in V$ மற்றும் $\alpha \in F$ எனில் $(\alpha u + \beta v, w) = ?$

6. Let V be an innerproduct space and let $v \in V$. Then what is the value of $\|v\|$?

V ஒரு உள்பெருக்கல் வெளி என்க மற்றும் $v \in V$ என்க. $\|v\|$ யின் மதிப்பு என்ன?

7. Let $u, v \in V$, an innerproduct space. When do you say that u is orthogonal to v?

V என்ற உள்பெருக்கல் வெளியில் $u, v \in V$ என்க. u எப்போது v-க்கு செங்குத்தாக இருக்கும் என கூறுக.

8. Define an algebra A over F.

F-ன் மீதான இயற்கணிதம் A வினை வரையறு.

9. Define a characteristic root λ of $T \in A(V)$.

$T \in A(V)$-ன் பண்பியல் மூலம் λ-வினை வரையறு.

10. Define the matrix of $T \in A(V)$.

$T \in A(V)$ யின் அணியினை வரையறு.

11. Compute $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

கணிக்க : $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12. When do you say that $S, T \in A(V)$ are similar?

$S, T \in A(V)$ எப்பொழுது வடிவொத்தாக இருக்கும்?

PART B — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

13. If V is a vector space over F, prove that

(a) $\alpha O = o$, $\alpha \in F$

(b) $ov = O$.

F ன் மீதான வெக்டர்வெளி V எனில்

(அ) $\alpha O = o$, $\alpha \in F$

(ஆ) $ov = O$ என நிறுவுக.

14. If $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ are linearly independent then prove that every element in their linear span has a unique representation in the form $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n,$ $\lambda_i \in F$.

$v_1, v_2, ..., v_n \in V$ என்பன நேரியல் சுயாதீனமானது எனில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் அவைகளின் நேரியல் இடைவெளியின் பிரதிநிதித்துவம் $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n,$ $\lambda_i \in F$ என்ற வடிவத்தை தனித்துவமாக பெற்றுள்ளது என நிறுவுக.

15. If V is finite-dimensional and W is a subspace of V then prove that

$$\hat{W} \approx \frac{\hat{V}}{A(W)}, \dim A(W) = \dim V - \dim W .$$

V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுள்ளதாகவும் W என்பது V யின் உள்வெளியாகவும் இருப்பின்

$\hat{W} \approx \dfrac{\hat{V}}{A(W)}, \dim A(W) = \dim V - \dim W$ என நிறுவுக.

16. Let $u, v \in V$ and $\alpha \in F$. Prove that

$$(\alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v) = \alpha\overline{\alpha}\,(u, u) + \alpha\,\overline{\beta}\,(u,v) + \overline{\alpha}\,\beta(v, u) + \beta\,\overline{\beta}\,(v,v)$$

$u, v \in V$ மற்றும் $\alpha \in F$ என்க.

$$(\alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v) = \alpha\overline{\alpha}\,(u, u) + \alpha\,\overline{\beta}\,(u, v) + \overline{\alpha}\,\beta(v, u) + \beta\,\overline{\beta}\,(v,v)$$

என நிறுவுக.

17. If V is a finite-dimensional innerproduct space and W is a subspace of V then prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுள்ள உள்பெருக்கல் வெளி மற்றும் W என்பது V யின் உள்வெளி எனவும் கொண்டால் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிறுவுக.

18. Let $\lambda \in F$ be a characteristic root of $T \in A(V)$. Prove that λ is a root of the minimal polynomial of T.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$ யின் ஒரு பண்பியல் மூலம் என்க. T யின் குறைந்தபட்ச பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலம் λ என நிறுவுக.

19. Define the matrix of T for $T \in A(V)$.

$T \in A(V)$ -க்கு T யின் அணியினை வரையறு.

PART C — (2 × 15 = 30 marks)

Answer any TWO questions.

20. If $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ is a basis of V over F and if $w_1, w_2, ..., w_m \in V$ are linearly independent over F, then prove that $m \le n$.

F ன் மீதான V யின் அடிக்களம் $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ என்றும், மற்றும் $w_1, w_2, ..., w_m \in V$ என்பன F -ன் மீதான நேரியல் சுயாதீனமானது என்றும் கொண்டால் $m \le n$ என நிறுவுக.

21. Let V be finite dimensional and $v \ne 0 \in V$. Prove that there is an element $f \in \hat{V}$ such that $f(v) \ne 0$.

V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுள்ளது எனவும் மற்றும் $v \ne 0 \in V$ எனவும் கொள்க. $f \in \hat{V}$ என்ற உறுப்பு $f(v) \ne 0$ என்றவாறு உள்ளது என நிறுவுக.

22. Let V be a finite dimensional inner product space. Prove that V has an orthonormal set as a basis.

V என்பது முடிவுறு பரிமாணமுள்ள உள்பெருக்கல் வெளி எனில் V ஒரு நெரிம அலகு செங்குத்து கணத்தை ஒரு அடிக்கணமாக பெற்றுள்ளது என நிறுவுக.

23. Let V be finite dimensional over F. Prove that $T \in A(V)$ is regular if and only if T maps V onto V.

V என்பது ஒரு முடிவுறு பரிமாணமுள்ள உள்பெருக்ல் வெளி என்க. $T \in A(V)$ ரெகுலராக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை T மேப்ஸ் V ஆன்டு V என நிறுவுக.

24. If V is n-dimensional over F and if $T \in A(V)$ has the matrix $m_1(T)$ in the basis $v_1, v_2, ..., v_n$ and the matrix $m_2(T)$ in the basis $w_1, w_2, ..., w_n$ of V over F, then prove that there is an element $C \in F_n$ such that $m_2(T) = C\, m_1(T)\, C^{-1}$.

V-என்பது F-ன் மீதான n-பரிமாணம் கொண்டது என்றும் மேலும் $T \in A(V)$ என்பதற்கு $v_1, v_2, ..., v_n$ என்ற அடிக்கணத்தை உடைய அணி $m_1(T)$ என்றும், மற்றும் Fன் மீது $w_1, w_2, ..., w_n$ என்ற அடிக்கணத்தை கொண்ட Tயின் அணி $m_2(T)$ என்றும் கொண்டால் $m_2(T) = C\, m_1(T)\, C^{-1}$ என்றவாறு $C \in F_n$ என்ற ஒரு உறுப்பு இருக்கும் என நிறுவுக.