(6 pages)

APRIL 2020 **72088/TAM6B**

Time : $1\frac{1}{2}$ hours Maximum : 75 marks

PART A — (5 × 3 = 15 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Prove that any open ball in a metric space (μ, ρ) is open.

   (μ, ρ) என்ற மெட்ரிக் வெளியில், எல்லா திறந்த கோளமும் திறந்த கணம் என நிறுவுக.

2. Define a set of type F_σ.

   F_σ வகை கணத்தை வரையறுக்க.

3. Prove that $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ is open in $[0, 1]$.

   $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ என்ற இடைவெளி $[0, 1]$ல் திறந்த கணம் என நிறுவுக.

4. Find the diameter of an interval $(1, \infty)$ in the discrete metric of $\mathbb{R}$.

   $(1, \infty)$ என்ற இடைவெளியின் விட்டத்தை $\mathbb{R}$-ன் தனித்த மெட்ரிக் வெளியில் காண்க.

5. Prove that $(0, 1)$ is not a complete space with absolute metric.

முழுமையான மெட்ரிக்கில் $(0, 1)$ முழுமையான வெளியல்ல என நிறுவுக.

6. Define Uniform continuity.

சீரான தொடர்ச்சியை வரையறு.

7. When do you say that a bounded function f is Riemann integrable on closed interval $[a, b]$.

எப்போது வரம்புடைய சார்பு f, மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ மீது ரீமான் தொகை காண முடியும்?

8. If $f(x) = 2x,\ 2 \le x \le 3,\ \sigma = \{2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}$ then find $U(f, \sigma)$.

$f(x) = 2x,\ 2 \le x \le 3,\ \sigma = \{2, 2.25, 2.5, 2.75, 3\}$ எனில் $U(f, \sigma)$ காண்க.

9. Using definition of derivatives if $f(x) = x^2$ on $0 \le x \le 8$, prove that $f'(3) = 6$.

வகைகெழு வரையறுத்தல் மூலம்,
$f(x) = x^2, 0 \le x \le 8$ எனில் $f'(3) = 6$ என நிறுவுக.

10. State Chain's rule.

சங்கிலி விதியை எழுதுக.

11. Give an example of uniform convergence of sequence of functions.

சீரான குவிதல் கொண்ட சார்புகளின் வரிசையைக்கு எடுத்துக்காட்டு கொடு.

12. State Cauchy criterion for uniform convergence.

காஸியின் சீரான குவிதலின் அடிப்படை தத்துவத்தை எழுது.

PART B — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

13. Prove that $\mathbb{R}$ is of second category.

$\mathbb{R}$ என்பது இரண்டாம் வகையினை கணம் என நிறுவுக.

14. If f is continuous from compact metric space M_1, into a metric space M_2, then prove that $f(M_1)$ is compact.

f என்பது கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி M_1 லிருந்து மெட்ரிக்வெளி M_2 க்கு செல்லும் சார்பு எனில் $f(M_1)$ கச்சிதமானது என நிறுவுக.

15. Verify that all bounded functions on $[a, b]$ are Riemann integrable.

$[a, b]$ மீதுள்ள எல்லா வரம்புடைய சார்புகளும் ரீமான் தொகை காணலாம் என நிறுவுக.

16. If $w[f:x] < a$ for each x in closed bounded interval J, then prove that there is a subdivision τ such that $U(f, \tau) - L(f, \tau) < a\,|J|$.

மூடிய வரம்புடைய இடைவெளி J ல் உள்ள எல்லா x க்கும் $w[f:x] < a$ எனில் τ என்ற உட்பிரிவுக்கு $U(f, \tau) - L(f, \tau) < a\,|J|$ என இருக்கும் என நிறுவுக.

17. If f and g both have derivatives at c, then prove that $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c)\, g'(c)$.

f, g என்ற சார்புகளுக்கு c யில் வகையிருக்குமாயின், $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c)\, g'(c)$ என நிறுவுக.

18. State and prove Rolle's theorem.

ரோல்ஸ் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

19. State and prove Taylor's formula with integral form of remainder.

தொகை வடிவில் மீதியுடன் உள்ள டெய்லர் சூத்திரத்தை எழுதி நிறுவுக.

PART C — (2 × 15 = 30 marks)

Answer any TWO questions.

20. Prove that the subset G of a metric space M is closed if and only if its complement is open.

மெட்ரிக் வெளி M ன் உட்கணம் G மூடியதாக இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே அதன் நிறைவு கணம் திறந்திருக்கும் என நிறுவுக.

21. If T is a contraction on a complete metric space M, then prove that there is only one point x in M such that $Tx = x$.

T என்பது ஒரு முழுமையான மெட்ரிக் வெளி M மீதான குறுக்கம் எனில் M -ல் உள்ள ஒரே ஒரு புள்ளி x க்கு மட்டும் $Tx = x$ என இருக்கும் என நிரூபி..

22. Prove that the bounded function f on $[a, b]$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ if and only if for $\in > 0$ $\exists$ subdivision σ on $[a, b]$ such that $U(f, \sigma) < L(f, \sigma) + \in$.

வரம்புடைய சார்பு f $[a, b]$ மீது $f \in \mathcal{R}[a, b]$ என்றிருந்தால் இருந்தால் தேவையான மற்றும் போதுமான மட்டுமே ஒவ்வொரு $\in > 0$ க்கும் ஒரு உட்பிரிவு σ ல் $U(f, \sigma) < L(f, \sigma) + \in$ என அமையும் என நிறுவுக.

23. State and prove second fundamental theorem of calculus.

நுண் கணிதத்தில் இரண்டாவது அடிப்படை தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

24. State and prove the Dini's theorem.

டினி தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.
