(6 pages)

NOVEMBER 2017 **72009/SAM5A/TAB5A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

Each question carries 2 marks.

1. Define the order of a group. What is the order of the symmetric group of degree n?

   ஒரு குலத்தின் நிலைமத்தை வரையறு. n படி கொண்ட சமச்சீர் குலத்தின் நிலைமம் யாது?

2. Prove that for every element 'a' in a group G, $(a^{-1})^{-1} = a$.

   G என்ற ஒரு குலத்தின் 'a' என்ற ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் $(a^{-1})^{-1} = a$ என்று நிறுவுக.

3. If H is a subgroup of a group G, define a right coset of H in G.

   H என்பது G என்ற ஒரு குலத்தின் உள் குலம் எனில், G-ல் H-ல் வல இணை கணத்தை வரையறு.

4. State Fermat's theorem.

   பெர்மாட்டின் தேற்றத்தை எழுதுக.

5. Let G be the group of positive real numbers under multiplication and let $\overline{G}$ be the group of all real numbers under addition. Prove that $G \approx \overline{G}$.

   G என்பது நேர் மெய் எண்களைக் கொண்ட பெருக்கலைப் பொறுத்து ஒரு குலம் என்க. $\overline{G}$ என்பது மெய் எண்களைக் கொண்ட கூட்டலைப் பொறுத்து ஒரு குலம் என்க. $G \approx \overline{G}$ என்று நிறுவுக.

6. Find the cycles of the permutation

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றத்தின் சுழல்களைக் காண்க.

7. Define a division ring. Give an example.

   ஒரு வகுத்தல் வளையத்தை வரையறு. ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

8. Let R be any ring. Define $\phi : R \to R$ by $\phi(x) = x, \forall x \in R$. Find the Kernel of ϕ.

   R என்பது ஒரு வளையம் $\phi : R \to R$ என்பதன் வரையறை $\phi(x) = x, \forall x \in R$. ϕ - ன் உட்கருவைக் காண்க.

III BSC (Maths) - Algebraic Structures I

9. If U and V are ideals of a ring R, prove that $U + V$ is also an ideal of R.

   U மற்றும் V என்பன R என்ற ஒரு வளையத்தின் சீர்மங்கள் எனில் $U + V$ என்பதும் R-ன் ஒரு சீர்மம் என்று நிறுவுக.

10. Define a maximal ideal of a ring R.

    R என்ற வளையத்தின் ஒரு பெரும சீர்மத்தை வரையறு.

11. State true or false:

    A unit element in a ring R is a unit in R.

    சரி அல்லது தவறு என்று எழுதுக.

    R என்ற வளையத்தின் அலகு உறுப்பு R-ல் ஒரு அலகு.

12. Define a prime element in a Euclidean ring.

    ஒரு யூக்ளிடியன் வளையத்தில் ஒரு பகா உறுப்பை வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

13. Let G be a group and H be a subgroup of G. For $a, b \in G$, define $a \equiv b \mod H$ if $ab^{-1} \in H$. Prove that the relation $a \equiv b \mod H$ is an equivalence relation.

    G என்பது ஒரு குலம். H என்பது G-ன் ஒரு உள்குலம். $a, b \in G$ என்க. $ab^{-1} \in H$ எனில் $a \equiv b$ மட்டு H என்று வரையறு. $a \equiv b$ மட்டு H என்ற உறவு ஒரு சமான உறவு என்று நிறுவுக.

14. State and prove Lagrange's theorem.

    லக்ரான்ஜேயின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

15. If ϕ is a homomorphism of G into $\overline{G}$ with Kernel K, prove that K is a normal subgroup of G.

    ϕ என்பது G-ல் இருந்து $\overline{G}$ - க்கு ஒரு செயலொப்புமை அதன் உட்கரு K. எனில் K என்பது G-ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்று நிறுவுக.

16. Prove that the alternating group A_n is a normal subgroup of S_n of index 2.

    A_n என்ற ஒன்றாடக் குறிக்குலம் குறியீடு 2 கொண்டு, S_n -ன் ஒரு நேர்மை உட்குலம் என்று நிறுவுக.

17. Prove that a finite integral domain is a field.

    ஒரு முடிவுள்ள எண் அரங்கம் ஒரு களம் என்று நிறுவுக.

18. Let R be a commutative ring with unit element and M be an ideal of R. Prove that M is a maximal ideal of R if and only if R/M is a field.

    R என்பது அலகு உறுப்பினைக் கொண்ட ஒரு பரிமாற்று வளையம். M என்பது R-ன் மீப்பெரு சீர்மமாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை R/M ஒரு களம் என்பதே என்று நிறுவுக.

19. State and prove the unique factorisation theorem.

    ஒருமைக் காரணிப்படுத்தல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

[P.T.O.]

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

Each question carries 10 marks.

20. If H and K are finite subgroups of G of orders $O(H)$ and $O(K)$ respectively, then prove that $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$.

H மற்றும் K என்பன G-ன் முடிவுள்ள உட்குலங்கள். அவைகளின் நிலைமங்கள் முறையே $O(H)$ மற்றும் $O(K)$ என்க எனில் $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$ என்று நிறுவுக.

21. State and prove Cayley's theorem.

கெய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

22. If U is an ideal of the ring R, then prove that R/U is a ring and is a homomorphic image of R.

U என்பது R என்ற ஒரு வளையத்தின் சீர்மம் எனில் R/U ஒரு வளையம் என்று நிறுவுக. மேலும் அது R-ன் செயலொப்புமை எதிருருவம் என்று நிறுவுக.

23. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

எந்தவொரு எண் அரங்கத்தையும் ஒரு களத்தில் பதிக்க முடியும் என்று நிறுவுக.

24. (a) Let R be a Euclidean ring. Prove that every element in R is either a unit in R or can be written as the product of a finite number of prime elements of R.

(b) Prove that the ideal $A = (a_0)$ is a maximal ideal of the Euclidean ring R if and only if a_0 is a prime element of R.

(அ) R என்று ஒரு யூக்ளிடியன் வளையம் R-ன் எந்தவொரு உறுப்பும் ஒரு அலகாகவோ அல்லது R-ன் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையிலான பகா உறுப்புகளின் பெருக்கலாகவோ இருக்கும் என நிறுவுக.

(ஆ) $A = (a_0)$ என்ற சீர்மம், R என்ற யூக்ளிடியன் வளையத்தின் ஒரு பெரும சீர்மமாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை a_0 என்பது R-ன் ஒரு பகா உறுப்பு என்று நிறுவுக.