

(6 pages)

NOVEMBER 2021

72084/TAM5B

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. If $A = \{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$, then how many elements does A have?

$A = \{1, 2, \{3\}, \{4, 5\}\}$ எனில் A எத்தனை உறுப்புகளை பெற்றிருக்கும்?

2. If $f(x) = x + 7$ ($x \in I$), $g(x) = 2x$ ($x \in I$), find $f \circ g$.

$f(x) = x + 7$ ($x \in I$), $g(x) = 2x$ ($x \in I$) எனில் $f \circ g$ காண்க.

3. Find the greatest lower bound of $\{\pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \dots\}$.

$\{\pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \dots\}$ -ன் மீப்பெரு குறை வரம்பு காண்க.

4. Find the limit of $\{n^{-n-1}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\{n^{-n-1}(n+1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ -ன் வரம்பு காண்க.

5. Define Cauchy sequence with example.

காஷே தொடர் முறையை வரையறுத்து உதாரணம் கொடு.

6. Prove that $\left\{ \log\left(\frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ is divergent.

$\left\{ \log\left(\frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ விரியும் என நிறுவுக.

7. If $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are sequences of real numbers, if $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ and if $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = M$ where

$$M \neq 0, \text{ prove that } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{t_n} \right) = \frac{L}{M}.$$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பன மெண்டெய்களின்

தொடர்கள், $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$ மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = M$ $M \neq 0$

எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{t_n} \right) = \frac{L}{M}$ என நிறுவுக.

8. What is meant by bounded sequence?

எல்லைபடுத்தப்பட்ட தொடர்ச்சி என்றால் என்ன?

9. Prove that $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ is a convergent series.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ ஒரு ஒருங்கும் தொடர் என நிறுவுக.

10. State Schwarz inequality.

ஸ்குவார்ஸ் சமனிமையை எழுதுக.

11. Define Metric space.

மெட்ரிக் வெளி வரையறு.

12. Define Continuous function.

தொடர்பு சார்பு வரையறு.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that infinite subset of the countable set is countable.

ஒரு எண்ணிடத்தக்க கணத்தின் முடிவுறா உட்கணமும் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

14. If the sequence of real numbers $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent, prove that $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded.

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர் ஒருங்கும் எனில் $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ வரம்புடையது என நிறுவுக.

15. Prove that a non-decreasing sequence which is bounded above is convergent.

மேல்வரம்புடைய குறைவுறா தொடர் ஒருங்கும் என நிறுவுக.

16. If $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ are sequences of real numbers, if $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverges to infinity, and if $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded, prove that $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverges to infinity.

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பன மெய்யெண்களின் தொடர், $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது முடிவிலியில் விரிவடையும் மற்றும் $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ வரம்புடையது எனில் $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது முடிவிலியில் விரிவடையும் என நிறுவுக.

17. Prove that every convergent sequence is a cauchy sequence.

ஒவ்வொரு ஒருங்கும் தொடரும் காஷே தொடர் என நிறுவுக.

18. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்ற கூட்டுத் தொடர் விரியும் தொடர் என நிறுவுக.

19. If f and g are real valued functions, if f is continuous at a and if g is continuous at $f(a)$, prove that $g \circ f$ is continuous at a .

f மற்றும் g ஆகியன மெய்யெண்களின் சார்பு, f ஆனது a -யில் தொடர்ச்சியானது, g ஆனது $f(a)$ -யில் தொடர்ச்சி எனில் $g \circ f$ ஆனது a -யில் தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the countable union of countable sets is countable.

எண்ணிடத்தக்க கணங்களின் சேர்ப்பும் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

21. Show that the $\left\{ \left[1 + \frac{1}{n} \right]^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent the sequence.

$\left\{ \left[1 + \frac{1}{n} \right]^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற தொடர் ஒருங்கும் என நிறுவுக.

22. State and prove nested interval theorem.

வலைப்பின்னல் இடைவெளி தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

23. State and prove Minkowski inequality.

மின்கோவ்ஸ்கி சமனின்மையை எழுதி நிறுவுக.

24. Show that l^{∞} is a metric space.

l^{∞} ஒரு மெட்ரிக் வெளி என நிறுவுக.
