(7 pages)

APRIL 2022 **72089/TAM6C**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Express the function $w = \frac{1}{z}$ in the form $u(x, y) + iv(x, y)$.

   $w = \frac{1}{z}$ என்ற சார்பினை $u(x, y) + iv(x, y)$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

2. Define Harmonic function.

   இசைச் சார்பு - வரையறு.

3. Under the mapping $w = e^z$ discuss the transforms of the line $y = 2\pi$.

   $y = 2\pi$ என்ற கோட்டின் உருமாற்றத்தை $w = e^z$ என்ற சார்புக்கு உட்பட்டு விவாதிக்க.

4. Find the image of the circle with centre origin and radius r under $w = z^2$.

   $w = z^2$ எனும்பொழுது ஆதியை மையப்புள்ளியாகவும், ஆரம் 'r' எனவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் நிழலைக் காண்க.

5. Evaluate $\int_c \frac{dz}{z-3}$ where c is the circle $|z-2| = 5$.

   $|z-2| = 5$ என்ற c எனும் வட்டத்தில் $\int_c \frac{dz}{z-3}$-ஐ மதிப்பிடுக.

6. State Cauchy-Goaursat theorem.

   காஷி கூசாட் தேற்றத்தைக் கூறுக.

7. Find the Laurent's series expansion of $f(x) = z^2 e^{1/2}$ about $z = 0$.

   $f(x) = z^2 e^{1/2}$, $z = 0$ -வின் லாரண்ட்ஸ் தொடர் விரிவாக்கத்தை காண்க.

8. Find the zeros of the function $\cos z$.

   $\cos z$ -என்ற சார்பின் பூஜ்ஜியத்தைக் காண்க.

9. Find the residue at $z = 0$ of $\frac{1+e^z}{z\cos z + \sin z}$.

   $z = 0$ எனும்பொழுது $\frac{1+e^z}{z\cos z + \sin z}$ என்ற சார்பின் எச்சத்தைக் காண்க.

10. Evaluate $\int_c \frac{dz}{2z+3}$ where C is $|Z| = 2$.

    மதிப்பிடுக $\int_c \frac{dz}{2z+3}$ இங்கு C என்பது $|Z| = 2$.

11. Expand $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ as a Taylor's series.

    $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ என்ற சார்பினை டெய்லர்ஸ் தொடரில் - விரிவுபடுத்துக.

12. Calculate the residue of $\frac{z+1}{z^2 - 2z}$ at its poles.

    $\frac{z+1}{z^2 - 2z}$ -ன் எச்சத்தை அதன் துருவத்தில் காண்க.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Find constants a and b so that the function $f(z) = a(x^2 - y^2) + ibxy + c$ is differentiable at every point.

    $f(z) = a(x^2 - y^2) + ibxy + c$ என்ற சார்பு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகையிடல் எனில் a மற்றும் b என்ற மாறிலியைக் காண்க.

14. Show that $u(x, y) = \sin x \cosh y + 2\cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$ is harmonic. Find an analytic function $f(z)$ is terms of z with the given u for its real part.

    $u(x, y) = \sin x \cosh y + 2\cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$ என்பது இசைச் சார்பு என நிறுவுக. மேலும் u என்பது மெய்ப் பகுதி எனில் z -ஐ பொருத்து $f(z)$ என்ற சார்பு பகுமுறை சார்பு எனக் காண்க.

15. Evaluate $\int_C \frac{z+2}{z} dz$ where C is the semi circle $z = 2e^{i\theta}$ where $0 \le \theta \le \pi$.

    $\int_C \frac{z+2}{z} dz$ -ஐ மதிப்பிடுக. இங்கு C - என்பது அரைவட்டம் எனில் $z = 2e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$

16. Let $f(z)$ be analytic inside and on the circle C with centre a and radius r. Then $f(a) = \int_0^l \frac{f(z)\,ds}{l}$ where s is the arc length and l is the circumference of the circle is the value of the function at the centre is equal to the mean of the value of the function on the circumference.

[P.T.O.]

C-என்ற வட்டத்தின் மையம் a மற்றும் ஆரம் 'r' எனும்பொழுது அவ்வட்டத்தின் உட்புறம் மற்றும் மேற்பரப்பில் $f(z)$-ஆனது வகையிடத்தக்கது எனில், $f(a) = \int_0^l \frac{f(z)\,ds}{l}$ என்ற வட்டத்தின் சுற்றளவைக் காண்க. இங்கு l- ஆனது வட்டத்தின் சுற்றளவு மேலும் s-ஆனது வளையத்தின் நீளம் ஆகும்.

17. State and prove Morara's theorem.

மொரேராஸ் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

18. Suppose $f(z)$ is analytic in a region D and is not identically zero in D. Then the set of all zeros of $f(z)$ is isolated.

$f(z)$ என்ற சார்பு D-என்ற பகுதியில் வகையிடத்தக்கது எனும்பொழுது அப்பகுதியில் ஒத்த பூஜ்ஜியங்கள் இல்லை எனில் $f(z)$-என்ற சார்பின் பூஜ்ஜியங்கள் அடங்கிய கனமானது தனிமைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது எனக் காண்க.

19. Find the poles of $f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ and determine the residues at the poles.

$f(z) = \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ என்ற சார்பின் துருவத்தைக் காண்க. மேலும் அத்துருவத்தில் அதன் எச்சத்தினைக் காண்க.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the function

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$$ satisfies C-R equations at the origin but $f'(0)$ does not exist.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$$ என்ற சார்பு ஆதிப்புள்ளியில் காஷிர்மானின் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்கிறது மேலும் இங்கு $f'(0)$ இல்லை என நிறுவுக.

21. Find the image of the following lines under the transformation $w = \cosh z$.

(a) $y = 0$

(b) $y = \frac{\pi}{2}$

(c) $y = -\frac{\pi}{2}$

(d) $y = \pi$

(e) $x = 0$

$w = \cosh z$ என்ற உருமாற்றியின் கீழ்கண்ட கோடுகளின் நிழலைக் காண்க.

(அ) $y = 0$

(ஆ) $y = \frac{\pi}{2}$

(இ) $y = -\frac{\pi}{2}$

(ஈ) $y = \pi$

(உ) $x = 0$

22. State and prove Cauchy's theorem.

காஷியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

23. State the prove Taylor's theorem.

டெய்லரின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

24. Find the residue to $\frac{1}{z - \sin z}$ at its pole.

$\frac{1}{z - \sin z}$ -ன் துருவத்தில் அதன் எச்சத்தினைக் காண்க.

———————