

(6 pages)

APRIL 2022

**72088/TAM6B**

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

- Define a bounded set.  
வர்ப்புடைய கணத்தை வரையறு.
- Define closed subset.  
முடிய கணத்தை வரையறு.
- Show that  $T(x) = x^2, \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}\right)$  is a contraction.

$$T(x) = x^2, \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}\right) \text{ என்பது ஒரு சுருக்கம் எனக் காட்டு.$$

$$\text{ஒரு யாப்பு வெளியின் மீது சீரான தொடர்ச்சியை வரைப்பி.}$$

4. Define uniform continuity on a metric space.

தொடர்ச்சியை குவித்தை வரையறு.

5. Prove that  $g(x) = \sqrt{x}, (0 \leq x \leq \infty)$  is a continuous function.

$g(x) = \sqrt{x}, (0 \leq x \leq \infty)$  ஒரு தொடர்ச்சியையாக சார்பு என நிருப்பி.

6. Show that the set of all natural numbers is of measure zero.

எல்லா இயல் எண்களின் கணம் ஒரு பூச்சிய அளவு கணம் எனக்காட்டு.

7. Define Maclaurin's series for  $f(x)$ .

$f(x)$  -ன் மெக்ஸின் தொடரை வரையறு.

8. What is Riemann integral?

மீண்டும் தொகையை என்றால் என்ன?

9. Verify Rolles' theorem for the function  $f(x) = x^2$ , where  $a = -1, b = +1$ .

$f(x) = x^2, a = -1, b = +1$  என்ற சார்பிக்கு ரோல்லின் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவேண்டும்.

10. State Taylor's theorem.

கெட்டெரின் தேற்றத்தைக்கறி.

11. Define convergent sequence.

குவியும் தொடர்ச்சியை வரையறு.

12. Define uniform convergence of series.

தொடர்ச்சியை குவித்தை வரையறு.

13. If  $\mathcal{H}$  be any non empty family of subsets of a metric space  $M$ , then prove that  $H = \bigcup_{G \in F} G$  is an open subset of  $M$ .

$\mathcal{H}$  ஆனது ஒரு மெட்ரிக் வெளி  $M$  -இன் திறந்த உட்கணங்களின் வெற்றில்லாத குறிமபம் எனக்.

$H = \bigcup_{G \in F} G$  ஆனது ஒரு திறந்த கணம் ஆகும் என்பதை நிருப்பி.

14. Prove that continuous image of a connected metric space is also connected.

தொடர்ச்சியான சார்பின் கீழ் தொடுத்த யாப்பு வெளியின் பிம்பும் தொடுத்ததே என நிருப்பி.

15. The metric space  $M$  is compact if and only if, whenever  $\mathcal{J}$  is a family of closed subsets of  $M$  with the finite intersection property, then prove that  $\bigcap_{F \in \mathcal{J}} F \neq \emptyset$ .

$M$  என்ற யாப்புவெளி கச்திமான வெளி எனில், மட்டுமே  $M$  -ன் முடிய உட்கணங்களாவான குடும்பம்  $\mathcal{J}$  என்பது முடிவறு வெட்டுப்பண்ணைப் பெற்றால்  $\bigcap_{F \in \mathcal{J}} F \neq \emptyset$  என நிருப்பி.

16. Show that  $g(x) = x^2$  is not uniformly continuous in  $(-\infty, \infty)$ .

$(-\infty, \infty)$  -ல்  $g(x) = x^2$  என்பது தீரான தொடர்ச்சியற்று எனக் காட்டு.

17. Let  $f$  be a bounded function on  $[a, b]$ . Then prove that  $f \in R[a, b]$  if and only if, for each  $\epsilon > 0$  there exists a subdivision  $\sigma$  of  $[a, b]$  such that  $U[f : \sigma] < L[f : \sigma] + \epsilon$ .

$[a, b]$  -ன் மீது  $f$  வரம்புதைய சார்பு எனில்,  $f \in R[a, b]$  எனில், எனில் மட்டுமே ஒவ்வொரு  $\epsilon > 0$ -க்கும்  $\sigma$  என்ற  $[a, b]$  -ன் பிரிவை உருவாக்கி பிரிவினை  $U[f : \sigma] < L[f : \sigma] + \epsilon$  இருக்கும் என நிருப்பி.

18. Obtain Taylor's formula with the integral form of the remainder.
- தொகை வடிவ பீதியுடைய பெட்டலீன் சூத்திரத்தைத் தரவி.

19. State and prove Cauchy criterion for uniform convergence of a sequence and functions.
- தொடர்புகளின் தொடர் முறையின் சிரான ஒருங்கலூக்கு கால்கி நிபந்தனையைக் கூறி நிறுவக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. State and prove Picard-fixed point theorem.

பிக்கார்ட்டின் நிலைப்புள்ளி தேற்றத்தைக் கூறி நிறுபி.

21. If the metric space  $M$  has the Heine-Borel property then prove that  $M$  is compact.

யாட்புலேசி  $M$  ஆனது ' வெப்ளி-போரல் பண்பைப் பெற்றிருப்பின் அது கச்சிதமானது என நிறுபி.

22. Prove that  $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$ .

$(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$  என நிறுபி.

23. State and prove law of the mean.
- சுராசிரியின் வீதியை எழுதி நிறுபி.

24. State and prove Dini's theorem.
- டினியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுபி.