

NOVEMBER 2022

72308/SM23A

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

- Find the equation of the straight line parallel to the line $3x - 2y + 7 = 0$ through the point (1, 2).

(1, 2) புள்ளி வழியாகவும் $3x - 2y + 7 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை காணக.

- Define conjugate diameters.

இணைவிட்டங்கள் வரையறு.

- Write the pole of the line $lx + my + n = 0$ with the

$$\text{ellipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் $lx + my + n = 0$ என்ற கோட்டின் துருவபுள்ளியைக் காணக.

4. Find the condition for the line $lx + my + n = 0$ to

$$\text{touch the hyperbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$lx + my + n = 0 \quad \text{என்ற கோடு} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{என்ற}$$

அதிபரவளையத்தை தொடுவதற்கான நிபந்தனையை எழுதுக.

5. Find the equation of the asymptotes of the hyperbola $xy = xn + yk$.

$xy = xn + yk$ என்ற அதிபரவளையத்தின் தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

6. Find the angle between the planes

$$3x - 4y + 5z = 0 \quad 2x - y - 2z = 5.$$

$3x - 4y + 5z = 0 \quad 2x - y - 2z = 5$. என்ற தளங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தை காணக.

7. Find the distance between the parallel planes

$$2x - 2y - z + 3 = 0 \text{ and } 4x - 4y + 2z + 5 = 0.$$

$2x - 2y - z + 3 = 0$ மற்றும் $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ என்ற இணையான தளங்களுக்கு தொலைவை காணக.

(அ) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ என்ற கோளத்தின் தொடுகோடு தளம் a, b, c ஆகிய அச்சுகளில் வெட்டுவது எனில் $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}$ என நிறுவுக. (6)

(ஆ) $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ என்ற கோடு வரை உள்ள செங்குத்து தூரத்தை காண்க. (4)

8. Find the equation of the plane passing through the line of intersection of the planes $2x - y = 0$ and $3z - y = 0$ are perpendicular to the plane $4x + 5y - 3z = 8$.

$2x - y = 0$ மற்றும் $3z - y = 0$ தளத்தின் வழியாகவும் $4x + 5y - 3z = 8$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு காண்க..

9. Find the image of the point $(1, 3, 4)$ in the plane $2x - y + z + 3 = 0$.

$2x - y + z + 3 = 0$ என்ற தளத்தின் புள்ளிகள் $(1, 3, 4)$ எனில் அதன் கற்பனை எண்ணை காண்க.

10. Find the perpendicular distance from $(3, 9, -1)$ to the line $\frac{x+8}{-8} = \frac{y-31}{1} = \frac{z-13}{5}$.

$(3, 9, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $\frac{x+8}{-8} = \frac{y-31}{1} = \frac{z-13}{5}$ என்ற கோடு வரை உள்ள செங்குத்து தொலைவை காண்க.

11. Find the centres and the radius of the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0.$$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ என்ற கோளத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காணக.

12. Find the equation of the sphere which has its centre at the point $(6, -1, 2)$ and touches the plane $2x - y + 2z - 2 = 0$.

$(6, -1, 2)$ என்ற புள்ளி மையமாகவும் $2x - y + 2z - 2 = 0$ என்ற தளத்தை தொட்டு செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை காணக.

PART B — $(5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

13. If chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ touch $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Find the locus of their poles.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, என்ற நீள்வட்டத்தின் நாண்கள்

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ -யை தொடுகின்றன எனில் அந்நாண்களின் துருவங்களின் நியமப் பாதையைக் காணக.

- (அ) முக்கோணத்தின் உச்சிபுள்ளிகள் $(1, 2, 3)$,

$(-2, -1, -4)$, $(3, 4, 2)$ எனில் அதன் பரப்பளவை காணக. (5)

- (ஆ) $my + nz = 0$, $nz + lx = 0$, $lx + my = 0$, $lx + my + nz = p$ ஆகிய தளங்கள் ஒரு டெட்ரா ஹெட்ரான் (tetrahedron) வடிவம் உருவாக்கும் எனில் அதன் கனஅளவு $\frac{2p^3}{3lmn}$ என நிறுவக. (5)

23. Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y - z + 2 = 0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts orthogonally the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

$(1, -2, 1)$ என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ என்ற கோளத்தை செங்கோணமாக வெட்டுவதாகவும், $3x + 2y - z + 2 = 0$ என்ற தளத்தை தொட்டு கொண்டு உள்ளதாகவும் அமைந்துள்ள கோளத்தின் சமன்பாட்டை காணக.

24. (a) If the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ makes intercepts a, b, c on the axes, show that $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{r^2}$.
- (b) Find the perpendicular distance of $(1, 2, 3)$ from the line $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$.

(அ) ஒரு நீள்வட்டத்தின் குவியம் வழிச் செல்லும் இணைக்கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் என நிறுவக. (5)

(ஆ) கோணத்தை தாங்கும் ஒரு நீள்வட்டத்தின் ஒரு நாண் pq எனில் அதன் தொடுகோடுகள் வெட்டு நியமப்பாதையை P மற்றும் Q வில் $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிறுவக. (5)

21. A pair of tangents to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ intercept on the x -axis a constant length c . Prove that the locus of the point of intersection is the curve $4y^2(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = c^2(y^2 - b^2)^2$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் ஒரு ஜோடி தொடுகோடுகள் x -அச்சில் ஒரு நிலையான நீளம் ' c 'யில் வெட்டும் குறுக்கு வெட்டு புள்ளியின் நியமப்பாதை $4y^2(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = c^2(y^2 - b^2)^2$ என நிறுவக.

22. (a) Find the area of the triangle whose vertices are $(1, 2, 3), (-2, 1, -4), (3, 4, -2)$.
 (b) Prove that $my + nz = 0, nz + lx = 0, lx + my = 0, lx + my + nz = p$ form a tetrahedron whose volume is $\frac{2p^3}{3lmn}$.

14. If e, e_1 are the eccentricities of a hyperbola and its conjugate, show that $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$.

e, e_1 என்பது அதிபரவளையம் மற்றும் அதன் இணை ஆகியவற்றின் உருவகங்கள் எனில் $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$ என நிறுவக.

15. Show that the condition for the line $lx + my + n = 0$ to be a normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}.$$

$lx + my + n = 0$ என்ற கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் செங்கோடு ஆக இருக்க $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$ என்ற நிபந்தனையை நிறுவக.

16. Show that the lines $\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-7}{-2}$

$3x + 2y + z - 2 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ are coplanar and find the equation to the plane in which they lie.

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-7}{-2}$$

$3x + 2y + z - 2 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ என்ற கோடுகள் ஒரே தளத்தில் உள்ள கோடுகள் என நிறுவுக மற்றும் அக்கோடுகள் இருக்கும் தளத்தினையும் காண்க.

17. Show that the equation of the plane containing the

line $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ and parallel to the line

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0 \text{ is } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0.$$

$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ என்ற கோட்டை கொண்டிருக்கும் மற்றும் $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$ என்ற கோட்டை இணையானதுமான உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0 \text{ என காண்க.}$$

18. Find the equation of a sphere which touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$ at the point $(2, -2, 1)$ and passes through the origin.

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$ என்ற கோளத்தை $(2, -2, 1)$ என்ற புள்ளியில் தொடும் மற்றும் ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 7 = 0, 2x - y + 2z = 5$ for a great circle.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 7 = 0$ வட்டம்
 $2x - y + 2z = 5$ மிகப்பெரிய வட்டமாக உள்ள கோளத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. (a) Show that the conjugate lines through a focus of an ellipse are at right angles.

- (b) A chord pq of an ellipse subtends a right angle at the centre of the ellipse. Show that the locus of intersection of the tangents at 'P' and 'Q' is $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.