

(6 pages)

NOVEMBER 2022

72316/SM25B

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. If  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by  $f(x) = |x|$ , then find  $f^{-1}(A)$  where  $A = \{1, 2, 3\}$ .

$f(x) = |x|$  என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  மேலும்  $A = \{1, 2, 3\}$  எனில்  $f^{-1}(A)$  யை காண்க.

2. Define 1-1 function.

1-1 க்கான சார்பை வரையறு.

3. Test the countability of a set  $\{\dots, -4, -2, 0, 2, \dots\}$ .

$\{\dots, -4, -2, 0, 2, \dots\}$  என்ற கணத்தின் எண்ணிடத்தக்கவை சோதிக்க.

4. Define non decreasing sequence.

குறையா தொடர்வரிசையை வரையறு.

III Bsc Maths  $\Rightarrow$  Real Analysis - I

2

72316/SM25B

11. Give an example of a metric space.

மெட்ரிக் வெளிக்கு எடுத்துக்காட்டு கூறுக.

$$12. \text{ Find } \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \text{ யைக் காண்க.}$$

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. If  $f: A \rightarrow B$  and if  $X$  and  $Y$  are subsets of  $B$ , then prove that  $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ .

$f: A \rightarrow B$  மேலும்  $X$  ம்  $Y$  யும்  $B$  ன் உட்கணங்கள் எனில்  $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$  என நிறுவுக.

14. Prove that any convergent sequence is bounded.

எல்லா ஒடுங்கும் தொடர்வரிசையும் வரம்புடையது என நிறுவுக.

$$5. \text{ Find } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \text{ யை காண்க.}$$

6. Define limit inferior.

கீழ் எல்லையை வரையறு.

7. Find  $\lim \sup$  of the sequence  $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots\}$  என்ற தொடர்வரிசையில் மேல் எல்லையை காண்க.

8. Define absolute convergence of the series.

தொடரின் முழுமை ஒருங்கலை வரையறு.

9. State comparison test for absolute convergence.

முழுமை ஒருங்கலுக்கான ஒப்பிட்டு சோதனையை எழுது.

10. Define the class  $l^2$ .

$l^2$  ன் வகுப்பை வரையறு.

15. If  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = M$ , then prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + t_n = L + M.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L \quad \text{மேலும்} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = M \quad \text{எனில்}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n + t_n = L + M \quad \text{என நிறுவுக.}$$

16. Prove that every convergent sequence is cauchy.

எல்ல ஒடுங்கும் தொடர்வரிசையும் காஸி தொடர்வரிசை என நிறுவுக.

17. State and prove comparison test for absolute convergence.

அறஒடுங்கலுக்கான ஒப்பிட்டுச் சோதனையை எழுதி நிறுவுக.

18. Prove that  $e^{\cdot}$  is a metric space.

$e^{\cdot}$  என்பது மெட்ரிக் வெளி என நிறுவுக.

19. If  $f: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is defined as  $f(\{x_n\}) = x_1$ , then prove that  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f: l^2 \rightarrow \mathbb{R}$  என்பது  $f(\{x_n\}) = x_1$  என வரையறுக்கப்பட்டால்,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. Prove that the  $[0, 1]$  is uncountable.

$[0, 1]$  என்ற கணம் எண்ணிடத்தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

21. Prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \frac{3}{5}$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \frac{3}{5}$  என நிறுவுக.

22. Prove that every cauchy sequence of real numbers is convergent.

மெய்யெண்களில் ஆன எல்லா காஸி தொடர்வரிசையும் ஒடுங்கும் என நிறுவுக.

23. State and prove the Minowski inequality on  $l^2$ .

$l^2$  மீதான மினோஸ்க்வி சமத்துவமின்மையை எழுதி நிறுவுக.

24. Prove that  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  என்பது விரிவடையும் தொடர் என நிறுவுக.

5

72316/SM25B

6

72316/SM25B