(8 pages)

NOVEMBER 2022 **51155/SR23A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions each in 30 words.

1. State Stoke's theorem.

ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை கூறு.

2. Define Vector point function.

வெக்டர் புள்ளிச் சார்பினை வரையறு.

3. To show that $\Gamma(1+m)\Gamma(1-m) = \dfrac{m\pi}{\sin m\pi}$.

$\Gamma(1+m)\Gamma(1-m) = \dfrac{m\pi}{\sin m\pi}$ எனக் காட்டு.

4. Prove that $\dfrac{d}{dx}(x^n \cdot J_n) = x^n J_{n-1}$.

$\dfrac{d}{dx}(x^n \cdot J_n) = x^n J_{n-1}$ என நிரூபி.

5. Show that $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ is a unitary matrix.

$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு ஒற்றை அணி எனக்காட்டு.

6. Show that the following matrix is orthogonal $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணியானது ஒரு செங்கோண அணி எனக் காட்டு.

7. What is an analytic function?

பகுப்பு சார்பு என்றால் என்ன?

8. Write Cauchy-Reimann condition.

காஷீ-ரீமான் சமன்பாட்டை எழுதுக.

9. Write down the equation for sine series in the interval $(0,\pi)$.

இடைவெளி $(0,\pi)$ -ல் சைன் தொடருக்கான சமன்பாட்டினை எழுதுக.

10. What are Dirichlet conditions?

டிரிக்லெட் சமன்பாடுகள் யாவை?

II Bsc physics → Mathematical Methods in physics.

11. Write an expression for beta and gamma functions.

பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகளின் சமன்பாட்டினை எழுதுக.

12. Find the value of $\Gamma_{1/2}$.

$\Gamma_{1/2}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions each in 200 words.

13. Apply Stoke's theorem to find the value of $\int_c [(2x-y)\,dx - yz^2 dy - y^2 z dz]$.

ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\int_c [(2x-y)\,dx - yz^2 dy - y^2 z dz]$-ன் மதிப்பைக் காண்.

14. Prove that

(a) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{d\theta}{\sqrt{(\sin\theta)}} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\, d\theta = \pi$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\, d\theta = \dfrac{\Gamma\frac{1}{4}\Gamma\frac{3}{4}}{2}$.

நிரூபி

(அ) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{d\theta}{\sqrt{(\sin\theta)}} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\sin\theta)}\, d\theta = \pi$

(ஆ) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\, d\theta = \dfrac{\Gamma\frac{1}{4}\Gamma\frac{3}{4}}{2}$.

15. Find the characteristic equation of the following matrix and verify the Cayley-Hamilton theorem $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

கீழ்க்கண்ட அணியின் பண்பியல் சமன்பாட்டினை காண்க. மேலும் கெய்லி ஹாமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார் $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

16. Derive the necessary and sufficient conditions for the derivative of a function $f(z) = u + iv$ to exist for all values of z.

$f(z) = u + iv$ என்ற சார்பு z-ன் அனைத்து மதிப்புகளையும் நிறைவு செய்வதற்கு அவசியமான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகளை நிறுவுக.

[P.T.O.]

17. Find the Fouries series of the function e^x in the interval $-\pi < x < \pi$.

e^x என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடரினை $-\pi < x < \pi$ இடைவெளியில் காண்க.

18. Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C [(xy + y^2)\,dx + x^2 dy]$.

$\oint_C [(xy + y^2)\,dx + x^2 dy]$ -க்கு தளத்தில் கிரீனின் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

19. Prove that $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ எனக் காட்டு. இங்கு $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions each in 500 words.

20. Verify divergence theorem for the vector $A = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the cube $0 \le x, y, z \le 1$.

$A = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ என்ற வெக்டாருக்கு கனசதுரம் முழுமைக்கும் $0 \le x, y, z \le 1$ எனக் கொண்டு காஸ் விரிதல் தேற்றத்தை சரிபார்.

21. Prove that $\Gamma(2m) = 2^{2m-1}(\pi)^{-1/2}\,\Gamma m\,\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)$, and hence show that $\left(m + \frac{1}{2}\right)! = \pi^{1/2}(2m+1)!!/2^{m+1}$ where $(2m+1)!! = 1.3.5. \ldots (2m-1)(2m+1)$.

$\Gamma(2m) = 2^{2m-1}(\pi)^{-1/2}\,\Gamma m\,\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)$ என நிரூபி. மேலும் $\left(m + \frac{1}{2}\right)! = \pi^{1/2}(2m+1)!!/2^{m+1}$ இங்கு $(2m+1)!! = 1.3.5. \ldots (2m-1)(2m+1)$ எனக் காட்டு.

22. Find the characteristic equation of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ and verify that it is satisfied by A. Hence find the inverse of A.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பண்பியல்பு சமன்பாட்டை கண்டறிந்து மேலும் அது A-யினை நிறைவு செய்கிறதா என்பதை சரிபார். A-ன் தலைகீழியைக் காண்க.

23. Prove that the function $u + iv = f(z)$ where

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}(z \ne 0, f0 = 0)$$

is continuous and that the Cauchy-Riemann equations are satisfied at the origin, yet $f'(0)$ does not exist.

$u + iv = f(z)$ என்ற சார்பினை நிறுவுக இங்கு

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}(z \ne 0, f0 = 0)$$

தொடர்ச்சியானது மற்றும் ஆயத்தில் காஷீ-ரீமான் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யக்கூடியதும் ஆகும். மேலும் $f'(0)$ -ல் நிறைவு செய்யவில்லை.

24. Expand as a Fourier series the function $f(x) = x^2$ in the interval $-\pi < x < \pi$ and hence evaluate

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ and

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$f(x) = x^2$ சார்புக்கான ஃபூரியர் தொடரினை $-\pi < x < \pi$ இடைவெளியில் விரிவுபடுத்து. மேலும் கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(அ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ மற்றும் .

(ஆ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$