

(6 pages)

NOVEMBER 2023

72315/SM25A

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. If $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in Q \right\}$ is a group under matrix multiplication, find one subgroup of G .

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in Q \right\}$$

என்பது

அணி பெருக்கலில் குலம் எனில் அதன் ஒரு உட்குலத்தை காண்க.

2. State Fermat's theorem.

பெர்மார்ட் தேற்றத்தை எழுதுக.

3. When HK should be a subgroup of G if H and K are subgroups of G ?

H யும் K யும் G ன் உட்குலங்கள் எனில் எப்போது HK G ன் உட்குலமாகும்?

4. Define a normal subgroup of G .

ஞன் இயல் உட்குலத்தை வரையறு.

5. Give an example of a group homomorphism.

குலத்தின் செயல்மாறா கோர்த்தலுக்கு எடுத்துக்காட்டு கூறுக.

6. If $\phi: G \rightarrow G'$ is homomorphism, then prove that $\phi(e) = e'$.

$\phi: G \rightarrow G'$ என்பது செயல்மாறா கோர்த்தல் எனில் $\phi(e) = e'$ என நிறுவுக.

7. Write down all the elements of S_3 .

S_3 ன் எல்லா உறுப்புகளையும் எழுது.

8. Write down one subgroup of S_4 which is not normal.

S_4 ல் நேர்மையிலா உட்குலத்தை எழுதுக.

9. Give an example of division ring.

வகுபடு வளையத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு கூறுக.

10. Define an ideal in a ring.

வளையத்தல் சீர்மத்தை வரையறு.

11. Define a prime element in a Euclidean ring.

தூக்ளிடியன் வளையத்தில் பகா உறுப்பை வரையறு.

12. List out all units of domain of Gaussian integer $J(i)$.

காலியன் அரங்கம் $J(i)$ -ன் எல்லா அலகுகளையும் எழுதுக.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that $Ha = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$ for all $a \in G$.

எல்லா $a \in G$ க்கும், $Ha = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$ என நிறுவுக.

14. Prove that a homomorphism ϕ of G into G' with kernel K_ϕ is an isomorphism if and only if $K_\phi = \{e\}$.

G யிலிருந்து G' க்கு K_ϕ என்ற உட்கருவுடன் ϕ என்ற செயல்மாறா கோர்த்தல் இயல்மாறா கோர்த்தலாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $K_\phi = \{e\}$ என நிறுவுக.

15. Prove that every permutation is a product of 2-cycles.

எல்லா வரிசைமாற்றமும் 2-சுழல்களின் பெருக்கல் என நிறுவுக.

16. If R is a commutative ring with unit element whose only ideals are $\{0\}$ and R itself, then prove that R is a field.

அலகு உறுப்புடன் பரிமாற்று பண்புடைய வளையம் R ன் சீர்மங்கள் $\{0\}$ மற்றும் R எனில் R என்பது களம் என நிறுவுக.

17. Prove that $M = \{f(x) \in R \mid f(1/2) = 0\}$ is a maximal ideal in the ring R of all the real-valued continuous functions on the closed unit interval.

இரு அலகு மூடிய இடைவெளி மீதுள்ள மெய்மதிப்புடைய தொடர்ச்சியான சார்புகளின் வளையம் R ன் மீப்பெரு சீர்மம் $M = \{f(x) \in R \mid f(1/2) = 0\}$ என நிறுவுக.

18. Prove that every Euclidean ring is a principal ideal ring.

எல்லா தூக்ளிடியன் வளையமும் முதன்மை சீர்மவளையம் என நிறுவுக.

19. State and prove unique factorization theorem.

ஒரே காரணியாக்கல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. State and prove Lagranges theorem.

லெக்ரான் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவக.

21. State and prove Sylow's theorem on abelian groups.

அபிலியன் குலத்திற்கான ஸெலோ தேற்றத்தை எழுதி நிறுவக.

22. State and prove Cayley theorem.

கெய்லி தேற்றத்தை எழுதி நிறுவக.

23. If R is a commutative ring with unit element and M is an ideal, then prove that M is a maximal ideal if and only if R/M is a field.

பரிமாற்று பண்பு மற்றும் அலகு உறுப்புடன் கூடிய வளையம் R ன் சீர்மம் M எனில் M என்பது மீப்பெரு சீர்மம் ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே R/M களமாகும் என நிறுவக.

24. Prove that $J(i)$ is a Euclidean ring.

$J(i)$ என்பது யூக்ளிடியன் வளையம் என நிறுவக.
