

(6 pages)

NOVEMBER 2023

72316/SM25B

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. If $f(x) = x^2$, $-\infty < x < \infty$, then find $f^{-1}(9)$ and $f^{-1}(25)$.

$$f(x) = x^2, -\infty < x < \infty \text{ எனில் } f^{-1}(9) \text{ மேலும் } f^{-1}(25) \text{ கைய காணக்.}$$

2. Verify that $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ is $1-1$.

$$f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi \text{ என்பது } 1-1 \text{ சார்பு என்டதை சரிபாரி.}$$

3. Find least upper bound of a set

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}.$$

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \text{ என்ற கணத்தின் மிகசிறு எல்லையை காணக்.}$$

4. Define limit of sequence.

இரு தொடர் வரிசையின் எல்லையை வரையியு.

5. Give an example of oscillating sequence.
ஊசலாடும் வரிசைக்கு எடுத்துக்காட்டு கூறு.
6. Find $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ if $s_n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.
 $s_n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ எனில் $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ கைய காணக்.
7. Give an example of nondecreasing sequence.
குறையா வரிசைக்கு எடுத்துக்காட்டு கூறு.
8. Define Cauchy sequence.
காலி வரிசையை வரையியு.
9. Give an example of conditionally converging series.
கட்டுப்பாடுன் ஒடுங்கும் தொடர்க்கு எடுத்துக்காட்டு கூறுக.
10. State comparison test for absolute convergence.
முழுமையான ஒடுங்கும் ஒப்படு சோதனையை எழுதுக.
11. Write down the metric on l^∞ .
 l^∞ -ன் மெட்ரிக் எழுதுக.
12. Write down the triangle inequality on the metric space (\mathcal{R}, ρ) .
 (\mathcal{R}, ρ) என்ற மெட்ரிக் வெளியின் சமயின்மையை எழுதுக.

72316/SM25B

IY Bsc Maths → Real Analysis – I

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that the set of integers in countable.
முழுக்களின் கணம் என்னிடத்தக்கு என நிறுவுக.

14. Prove that the sequence of real numbers converge to a unique limit.
மூப்பெண்களின் வரிசை ஓரே எல்லையில் ஒடுங்கும் என நிறுவுக.

15. Prove that a non decreasing sequence which is not bounded above diverges to infinity.
மேல் வரம்பு இல்லா குறைவனையா வரிசை முடிவிலியில் விரிவுடையும் என நிறுவுக.

16. If $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$, then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = L^2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L, \text{ எனில் } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = L^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

17. Give an example of sequences $\{s_n\}$ and $\{t_n\}$ so that $s_n \rightarrow \infty$, $t_n \rightarrow \infty$ but $\{s_n - t_n\} \rightarrow 7$.

18. If $0 < x < 1$, then prove that $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converges to $\frac{1}{1-x}$.
 $0 < x < 1$ எனில் $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ என்ற தொடர் $\frac{1}{1-x}$ கூடுங்கும் என நிறுவுக.

19. If f is a monotone function on (a, b) and if $c \in (a, b)$, that prove that $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ exists.

20. Prove that countable union of countable sets if countable.
 f என்பது (a, b) மீதான ஒருமுக சார்பு எனில் $c \in (a, b)$, கு மிகும் $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ கொண்டுள்ளது என நிறுவுக.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

21. Prove that countable union of countable sets if countable.
எண்ணிடத்தக்கு கணாங்களின் எண்ணிடத்தக்கு சேர்ப்பு கணம் எண்ணிடத்தக்கு என நிறுவுக.

21. Prove that $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ is Convergent.

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

என்ற வரிசை ஒடுங்கும் என நிறுவக.

24. Prove that the real-valued function f is continuous at $a \in \mathbb{R}$, if and only if whenever $x_n \rightarrow a$, then $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

பொய் மதிப்புடை சார்பு f , $a \in \mathbb{R}$ ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால் இருந்தால் மட்டுமே $x_n \rightarrow a$, எனும் போதல்லோம் $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ஆக அமையும் என நிறுவக.

22. If $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n = M$ for a bounded sequence

$\{S_n\}$ of real numbers, then prove that

(a) $S_n > M - \epsilon$ for infinitely many values of n .

(b) $S_n < M + \epsilon$ for all but finite values of n .

வரம்புடை வரிசை $\{S_n\}$ க்கு $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n = M$ எனில்

(அ) $S_n > M - \epsilon$ என்னிலெந்கா n களுக்கு

(ஆ) $S_n < M + \epsilon$ பூட்டுறி 'n' கை தணிர என நிறுவக.

23. State and prove the root test.

மூலச்சோதனையை எழுதி நிறுவக.