(6 pages)

APRIL 2024 **72323/SM26A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A – (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Define Vector space.

   திசையன் வெளி - வரையறு.

2. If V is a vector space over F, prove that $ov = o$, $v \in V$.

   F-ன் மீதான திசையன் வெளி V என்க. $ov = o$, $v \in V$ என நிறுவுக.

3. If $\dim_F V = n$, find $\dim_F Hom(V, V)$.

   $\dim_F V = n$ எனில் $\dim_F Hom(V, V)$ காண்க.

4. If S, T are subsets of V and if SCT, prove that $L(S)CL(T)$.

   S, T ஆகியன V-யின் உள்கணம் மற்றும் SCT எனில், $L(S)CL(T)$ என நிறுவுக.

5. Define dual space.

   இரட்டை வெளி வரையறு.

6. Prove that $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

   $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$ என நிறுவுக.

7. Define algebra.

   இயற்கணிதம் வரையறு.

8. Define range of the linear transformation.

   நேரியல் உருமாற்றத்தின் வீச்சு-வரையறு.

9. Define characteristic vector.

   சிறப்பியல்பு திசையன் வரையறு.

10. Compute $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

    $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ கணக்கிடுக.

11. When do you say, the linear transformations $S, T \in A(V)$ are similar.

    $S, T \in A(V)$ என்ற நேரியர் உருமாற்றங்கள் ஒத்தவையாக இருக்கும்.

12. Find the dimension of the subspace spanned by the vectors (1, 2, –3), (0, 0, 1), (–1, 2, 1) in $V_3(R)$.

    $V_3(R)$-ல் உள்ள (1, 2, –3), (0, 0, 1), (–1, 2, 1) என்ற திசையன்கள் கொண்ட படர்வின் பரிமாணம் காண்க.

SECTION B – (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that $L(S)$ is a subspace of V.

    $L(S)$ என்பது V-யின் உள்வெளி என நிறுவுக.

14. If $v_1 \ldots v_n$ are in V, prove that either they are linearly independent or some v_k is a linear combination of the preceding ones, $v_1 \ldots v_{k-1}$.

    $v_1, v_2, \ldots v_n$ என்பன V யில் இருப்பின் அவைகள் ஒரு படி சாராதவைகளாகவோ அல்லது சில v_k என்பவை அதன் முந்திகளான $v_1, v_2 \ldots v_{k-1}$ என்பவைகளின் ஒரு படி கலவையாக இருக்கும் என நிறுவுக.

15. Prove that $A(A(W)) = W$.

    $A(A(W)) = W$ என நிறுவுக.

16. If V is a finite dimensional inner product space and W is a subspace of V, prove that $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

    V என்பது முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உள்பெருக்கல் வெளி மற்றும் W என்பது V-யின் உள்வெளி எனில் $(W^{\perp})^{\perp} = W$ என நிறுவுக.

17. If V is finite dimensional over F and if $T \in A(V)$ is invertible, prove that T^{-1} is a polynomial expression in T over F.

    F மீது V ஒரு முடிவுறு பரிமாண முடையது மற்றும் $T \in A(V)$ ஒரு தன்மாற்றமுடையது எனில் T^{-1} என்பது T-ன் மீதான F யில் உள்ள ஒரு பல்லுருப்புக் கோவை என நிறுவுக.

18. If T, $S \in A(V)$ and if S is regular, prove that T and STS^{-1} have same minimal polynomial.

    T, $S \in A(V)$ மற்றும் S ஒழுங்குறு கொண்டது எனில் T மற்றும் STS^{-1} ஆகியன ஒரே குறைந்தபட்ச பல்லுருப்புக் கோவையை பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

19. If $T \in A(V)$ has only O as a characteristic root, prove that T is nill potent.

    $T \in A(V)$ ஆனது O வை மட்டும் சிறப்பியல்பு மூலமாக பெற்றிருக்கும் எனில் T ஒரு படிச்சுழி என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. If A and B are finite dimensional subspaces of a vector space V, then prove that $(A+B)$ is finite dimensional and

$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$.

A மற்றும் B என்பன V யின் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்ட உள்வெளிகள் எனில் $(A+B)$-யும் முடிவுறு பரிமாணம் கொண்டது என்றும் மற்றும் $\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ எனவும் நிறுவுக.

21. Prove $Hom(V, W)$ is a vector space over F under suitable operation.

F-ன் மீது, $Hom(V, W)$ என்பது வெக்டர்வெளி என்பதை தக்க செயல்படுகளில் நிறுவுக.

22. State and prove Gram-Schmidt orthogonalization process.

க்ராம்-ஸ்மித்-ன் செங்குத்து மயமாக்கும் முறையை எழுதி நிறுவுக.

23. If V is finite dimensional over F, then prove that for $S, T \in A(V)$.

(a) $r(ST) \le r(T)$

(b) $r(TS) \le r(T)$ [and so $r(ST) \le \min\{r(T), r(S)\}$]

(c) $r(ST) = r(TS) = r(T)$ for S regular in $A(V)$.

F-ன் மீது V முடிவுறு பரிமாண முடையது எனில் $S, T \in A(V)$ க்கு

(அ) $r(ST) \le r(T)$

(ஆ) $r(TS) \le r(T)$ [மற்றும் $r(ST) \le \min\{r(T), r(S)\}$]

(இ) $r(ST) = r(TS) = r(T)$, S என்பது $A(V)$ ஒழுங்குருவுடையது என நிறுவுக.

24. If $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F, prove that there is a basis of V in which the matrix of T is triangular.

$T \in A(V)$ தன்னுடைய எல்லா சிறப்பியல்பு மூலங்களையும் F-ல் பெற்றிருக்குமானால், T என்பதன் அணி முக்கோண அணியாக இருக்குமாறு V-யில் ஒரு அடிக்கணம் உள்ளது என நிறுவுக.