(8 pages)

NOVEMBER 2024 **52502/124E1A/125E1A/129E1A/137E1A/141E1A/120E1A/138E1A/127E1A/126E1A/220E3A/241E3A/226E3A/227E3A/225E3A**

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — $(10 \times 2 = 20$ marks)

Answer any TEN questions.

1. Prove that $x^n = 1 + n\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + ...$

   $x^n = 1 + n\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + ...$ என நிறுவுக.

2. When $-1 < x < 1$, write the expansion of $\log(1 - x)$.

   $-1 < x < 1$ எனில் $\log(1 - x)$ ன் விரிவை எழுதுக.

3. Define : Hermitian matrix.

   ஹெர்மிசியன் அணி - வரையறு.

4. Show that the following matrix is skew-symmetric.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   கீழ்கண்ட அணி A எதிர் சமச்சீர் அணி எனக்காட்டு.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Show that $E = 1 + \Delta$.

   $E = 1 + \Delta$ எனக்காட்டுக.

6. Write Newton's approximation x_n to find a root of $f(x) = 0$.

   $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு நியூட்டனின் தோரய மதிப்பு x_n ஐ எழுதுக.

7. Write the expansion for $\sin 7\theta$ in terms of powers of $\cos\theta$ and $\sin\theta$.

   $\sin 7\theta$ ன் விரிவை $\cos\theta$ மற்றும் $\sin\theta$ ஆகியவற்றின் அடுக்குகளாக விரித்தெழுதுக.

8. Separate into real and imaginary part of $\sin(\theta - i\varphi)$.

   $\sin(\theta - i\varphi)$ ன் மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளை பிரித்தெழுதுக.

9. Write the nth derivative of $y = (ax + b)^n$.

   $y = (ax + b)^n$ ன் nவது வகைக்கெழுவை எழுதுக.

10. State Leibnitz theorem.

    லிபினிட்ஸின் தேற்றத்தை எழுதுக.

11. Form a forward difference table for the following data.

x :	3	4	5	6
y :	6	24	60	120

    மேற்கண்ட விவரங்களுக்கு முன்னோக்கு வித்தியாச அட்டவணையை தயார் செய்க.

x :	3	4	5	6
y :	6	24	60	120

12. If $u = x^2 - y^2$, $v = xy$, show that $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$.

    $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ எனில் $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$ எனக் காட்டு.

PART B — $(5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

13. If $x > 0$, show that

    $$\log(1 + x) = \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2}\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3 - 1}{(x + 1)^3} + ...$$

    $x > 0$ எனில்

    $$\log(1 + x) = \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2}\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3 - 1}{(x + 1)^3} + ...$$ எனக் காட்டுக.

14. Show that $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ is an orthogonal matrix.

    $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ என்ற அணி செங்குத்தானது எனக்காட்டு.

15. Find the value of y when $x = 8$ from the following data.

x :	0	5	10	15	20	25
y :	7	11	14	18	24	32

[P.T.O.]

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து $x = 8$ எனும்போது y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

x :	0	5	10	15	20	25
y :	7	11	14	18	24	32

16. Show that $\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta$.

$\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta$ எனக் காட்டு.

17. Find the nth derivative of $y = \sin 3x \sin 2x$.

$y = \sin 3x \sin 2x$ ன் n-வது வகைக்கெழுவைக் காண்க.

18. Express the following matrix A as the sum of a symmetric and skew-symmetric matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

கீழ்க்கண்ட அணி Aஐ சமச்சீர் மற்றும் எதிர்-சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

19. If $y = \tan^{-1}(x)$, prove that

(a) $(1+x^2)y_1 = 1$

(b) $(1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$

$y = \tan^{-1}(x)$ எனில்

(அ) $(1+x^2)y_1 = 1$

(ஆ) $(1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$ என்பனவற்றை நிரூபி.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. (a) Sum the series :
$1 + \frac{1}{3.6} + \frac{1.3}{3.6.9} + \frac{1.3.5}{3.6.9.12} + ...$

(b) Show that $1 + \frac{(\log_e 2)^2}{2!} + \frac{(\log_e 2)^4}{4!} + ... = \frac{5}{4}$.

(அ) $1 + \frac{1}{3.6} + \frac{1.3}{3.6.9} + \frac{1.3.5}{3.6.9.12} + ...$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

(ஆ) $1 + \frac{(\log_e 2)^2}{2!} + \frac{(\log_e 2)^4}{4!} + ... = \frac{5}{4}$ எனக்காட்டு.

21. Find inverse of the following matrix A using Cayley-Hamilton theorem :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

கீழ்க்கண்ட அணி A-ன் நேர்மாறை கெய்லி – ஹாமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி காண்க.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

22. Using Newton's method, find the positive root of $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$ correct to 3 decimal places.

$x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகைத் தீர்வை நியூட்டனின் முறையைப் பயன்படுத்தி 3 தசம திருத்தமாக காண்க.

23. (a) Show that $2^{10}\cos^5\theta\sin^6\theta = 10\cos\theta - 10\cos 3\theta - 5\cos 5\theta + 5\cos 7\theta + \cos 9\theta - \cos 11\theta$.

(b) If $\tan(A+iB) = x+iy$, then show that

(i) $x^2 + y^2 + 2x\cot 2A = 1$;

(ii) $x^2 + y^2 - 2y\coth 2B = -1$.

(அ) $2^{10}\cos^5\theta\sin^6\theta = 10\cos\theta - 10\cos 3\theta - 5\cos 5\theta + 5\cos 7\theta + \cos 9\theta - \cos 11\theta$ எனக் காட்டு.

(ஆ) $\tan(A+iB) = x+iy$ எனில்

(i) $x^2 + y^2 + 2x\cot 2A = 1$;

(ii) $x^2 + y^2 - 2y\coth 2B = -1$ எனக் காட்டுக.

24. Find the maximum and minimum values of the function $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு மற்றும் மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்க.