

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer any TEN questions.

1. Define an order of an element of a group.
குலத்தில் உள்ள உறுப்பின் வரிசையை வரையறு.
2. State Euler's theorem.
ஆய்லரின் தேற்றத்தை எழுதுக.
3. If H and K are subgroups of a finite group G , then find $O(HK)$.
முடிவுறு குலம் G ன் உட்குலங்கள் H யும் K யும் எனில் $O(HK)$ யை காண்க.
4. Define a normal subgroup of a group.
குலத்தின் நேர்மை உட்குலத்தை வரையறு.
5. Give an example of group homomorphism.
குலத்தின் செயல்மாறா கோர்த்தலின் வரையறு.

11. Define Euclidean ring.

யூக்ளிடியன் வளையத்தை வரையறு.

12. List all units of $J(i)$.

 $J(i)$ ன் எல்லா அலகுகளையும் தருக.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

13. Prove that $H_a = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$ for all $a \in G$.
 $H_a = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$ என எல்ல $a \in G$ க்கும் நிறுவுக.

14. Prove that the subgroup N of G is a normal subgroup if and only if every left coset of N is a right coset of N .

G ன் உட்குலம் N நேர்மை உட்குலமாக அமைவதற்கு தேவையான மற்றும் அவசியமான கட்டுப்பாடு N ன் ஒவ்வொரு இடது இணை கணமும் வலது இணை கணமாகும் என நிறுவுக.

6. If $\varphi: G \rightarrow G'$ is a homomorphism, then prove that

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}.$$

$\varphi: G \rightarrow G'$ என்பது செயல்மாறா கோர்த்தல் எனில்

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$$
 என நிறுவுக.

7. Find the relation between groups and groups of permutation.

குலத்திற்கும் வரிசைமாற்று குலத்திற்கும் ஆன உறவைக் காண்க.

$$8. \text{ Find } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
 யை காண்க.

9. Give an example of a division ring.

வகுவளையத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

10. List one maximal ideal in \mathbb{Z} .

\mathbb{Z} ல் ஒரு மீப்பெரு கீர்மத்தை கூறுக.

2

72315/SM25A

15. Prove that the kernel of a homomorphism

$\varphi: G \rightarrow G'$ is a normal subgroup of G .

$\varphi: G \rightarrow G'$ ன் உட்கரு G ன் நேர்மை உட்குலம் என நிறுவுக.

16. Prove that A_n is a normal subgroup of S_n , $n \geq 3$.

$n \geq 3$ -ல், A_n என்பது S_n ன் நேர்மை உட்குலம் என நிறுவுக.

17. Prove that every field is an integral domain verify the converse.

எல்லா களமும் ஒரு எண் அரங்கமே என நிறுவுக. அதன் மறுதலையை சோதிக்க.

18. Prove that any two elements a and b in a Euclidean ring has greatest common divisor of the form $\lambda a + \mu b$, $\lambda, \mu \in R$.

எந்த இருஉறுப்புகள் $a, b \in R$ க்கு மீ.பெ.வ.-வை $\lambda a + \mu b$ என்ற வடிவில் யூக்ளிடியன் வளையம் R பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

19. In a Euclidean ring R , prove that every element in R is unit or can be written as product of finite number of prime elements.

யூக்ளிடியன் வளையத்தின் எல்லா உறுப்பும் அல்லது ஒன்று அல்லது முடிவுறு பதா எண்களின் பெருக்கலாக எழுத முடியும் என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

20. State and prove Lagrange's theorem.
லெக்ராஞ் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

21. If $\varphi: G \rightarrow G'$ is an onto homomorphism with kernel K , then prove that $\frac{G}{K} \cong G'$.

உட்கரு K யை கொண்ட $\varphi: G \rightarrow G'$ மேல் செயல் மாறா கோர்த்தல் எனில் $\frac{G}{K} \cong G'$ என நிறுவுக.

22. State and prove Cayley's theorem.
கெய்லி தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

23. Prove that $M = \{f(x) \in R \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\}$ is maximal ideal in a ring R of all real-valued continuous on closed unit interval.

மூடிய அல்லது இடைவெளி மீதான மெய்யமதிப்புடை தொடர்ச்சியான சார்புகளின் வளையம் R ல்,

$M = \{f(x) \in R \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\}$ என்பது மீப்பெரு சீர்மம் என நிறுவுக.

24. Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

எல்லா எண் அரங்கமும் களத்தில் உள்பொதிந்ததாக இருக்கும் என நிறுவுக.